



# Analyse asymptotique multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème de couche mince dans un domaine à coin

Grégory Vial

## ► To cite this version:

Grégory Vial. Analyse asymptotique multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème de couche mince dans un domaine à coin. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2003. Français. NNT: . tel-00005153

**HAL Id: tel-00005153**

**<https://theses.hal.science/tel-00005153>**

Submitted on 27 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ANALYSE MULTI-ÉCHELLE  
ET CONDITIONS AUX LIMITES APPROCHÉES  
POUR UN PROBLÈME AVEC COUCHE MINCE  
DANS UN DOMAINE À COIN

**Grégory Vial**

*Thèse dirigée par Gabriel Caloz et Monique Dauge*

Soutenue le 26 juin 2003 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY

G. Caloz	PR (Université de Rennes 1)	Directeur de thèse
M. Costabel	PR (Université de Rennes 1)	Président du jury
M. Dauge	DR (Université de Rennes 1)	Co-directrice de thèse
J.-C. Nédélec	DR (École polytechnique)	Rapporteur
S. Nicaise	PR (Université de Valenciennes)	Rapporteur
M. Pierre	PR (ENS Cachan, antenne de Bretagne)	Membre du jury
J. Rappaz	PR (EPFL, Lausanne, Suisse)	Membre du jury



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Conditions d'impédance pour un domaine régulier</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction . . . . .	15
1.2 Étude du problème de transmission . . . . .	16
1.2.1 Existence et unicité . . . . .	16
1.2.2 Régularité elliptique au voisinage du bord . . . . .	18
1.3 Construction du développement asymptotique . . . . .	27
1.3.2 Préliminaires . . . . .	27
1.3.3 Transformation en domaine fixe . . . . .	28
1.3.4 Les problèmes élémentaires . . . . .	29
1.3.4 Calcul des premiers termes . . . . .	29
1.3.5 Le développement complet . . . . .	31
1.4 Conditions aux limites approchées . . . . .	33
1.4.1 Condition d'ordre 0 . . . . .	33
1.4.2 Condition d'ordre 1 . . . . .	34
1.4.3 Condition d'ordre 2 . . . . .	36
1.5 Résultats numériques . . . . .	37
1.5.1 Les problèmes continus . . . . .	37
1.5.2 Approximation à l'aide d'éléments droits de type $\mathbb{Q}_1$ . . . . .	39
1.5.3 Approximation à l'aide d'éléments courbes de degré 6 . . . . .	41
1.6 Conclusion . . . . .	43
<b>2 Construction des profils dans un domaine sectoriel infini</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction . . . . .	45

2.2	Solution variationnelle . . . . .	46
2.3	Transformation en domaine homogène . . . . .	49
2.4	Les problèmes élémentaires . . . . .	52
2.4.1	Le problème intérieur : singularités . . . . .	53
2.5.1	Le problème extérieur . . . . .	54
2.5	Développement asymptotique “sur-variationnel” . . . . .	55
2.5.2	L’espace des fonctions singulières en l’infini . . . . .	55
2.5.2	Solution au problème avec comportement à l’infini . . . . .	55
2.6	Régularité variationnelle dans les espaces à poids . . . . .	58
2.6.1	Estimation elliptique locale . . . . .	59
2.6.2	Espaces à poids et régularité du terme variationnel . . . . .	63
2.7	Développement “sous-variationnel” . . . . .	67
2.7.1	La transformation de Mellin . . . . .	67
2.7.2	Prolongement méromorphe du terme variationnel . . . . .	68
2.7.3	Développement asymptotique du terme variationnel . . . . .	73
2.8	Conclusion . . . . .	77
2.8.1	Problème homogène . . . . .	77
2.8.2	Problème avec second membre . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Développement asymptotique dans un domaine à coin</b>	<b>81</b>
3.1	Le problème . . . . .	81
3.2	Écriture du problème sur un domaine fixe . . . . .	82
3.2.1	Représentation tensorielle de la couche mince . . . . .	82
3.2.2	Expression du Laplacien dans les nouvelles coordonnées . . . . .	84
3.2.3	Expression de la dérivée normale dans les nouvelles coordonnées . . . . .	85
3.2.4	Dilatation dans la direction $\vec{\nu}$ . . . . .	86
3.3	Premier ansatz . . . . .	87
3.4	Les premiers termes du développement . . . . .	92
3.5	La construction complète . . . . .	98
3.6	Cas d’un second membre non plat . . . . .	101
3.7	Conclusion . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Performance de la condition d’impédance pour un domaine à coin</b>	<b>105</b>
4.1	Introduction . . . . .	105
4.2	Développement asymptotique pour le problème avec impédance . . . . .	106
4.2.1	Résolution dans le domaine modèle . . . . .	106
4.2.2	Le développement asymptotique . . . . .	108
4.3	Estimations optimales . . . . .	109
4.3.1	Étude des profils . . . . .	110

---

4.3.2	Étude des termes plats . . . . .	111
4.3.3	Estimations d'erreur . . . . .	113
4.4	Résultats numériques . . . . .	116
4.4.1	Le problème . . . . .	116
4.4.2	La méthode numérique . . . . .	118
4.4.3	Résultats des calculs . . . . .	121
4.5	Conclusion . . . . .	132
 <b>Annexe : Approximation de degré élevé avec MÉLINA</b>		<b>133</b>
 <b>Bibliographie</b>		<b>137</b>
 <b>Index des notations</b>		<b>141</b>



# Introduction

## Origine du problème

Avec l'essor du marché des télécommunications, l'intérêt porté à l'étude des ondes électromagnétiques est de plus en plus vif. Les technologies ayant considérablement progressé, les problèmes sont toujours plus complexes et, là où une approche empirique semblait suffire il y a quelques années, une étude mathématique approfondie devient nécessaire à l'heure actuelle. En outre, la simulation numérique s'est largement développée pour compléter l'expérience, et parfois même la remplacer.

De nombreux problèmes mettent en jeu des matériaux présentant des couches minces. C'est le cas des chambres anéchoïdes : il s'agit de pièces dont les murs, sols et plafonds sont recouverts d'un matériau absorbant (voir figure 1). Elles sont utilisées pour analyser les ondes émises par un dispositif (par exemple un téléphone portable) sans que les réflexions sur les parois ne gênent l'expérience. L'épaisseur de la zone absorbante est faible devant les dimensions caractéristiques de la pièce et peut donc être modélisée par une couche mince. Citons aussi le domaine de la furtivité radar : la peinture qui recouvre l'avion absorbe les ondes émises par un radar et lui permet de demeurer invisible. Le rapport entre l'épaisseur de la couche de peinture et les dimensions caractéristiques de l'appareil est, ici, encore plus faible.

La résolution numérique d'un problème posé dans un domaine avec couche mince est difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche. Le maillage comporte alors un très grand nombre d'éléments, ce qui rend les calculs longs et parfois peu précis. Pour cette raison, on cherche à remplacer le problème initial par un autre problème, dont la solution est proche de celle qu'on recherche, et qui ne fait plus intervenir de couche mince.

L'objet de cette thèse est l'analyse asymptotique du problème avec couche mince, quand l'épaisseur  $\varepsilon$  de la couche tend vers 0. La construction d'un développement asymptotique



multi-échelle de la solution permet d'identifier des problèmes avec conditions aux limites approchées, et de les analyser avec précision.

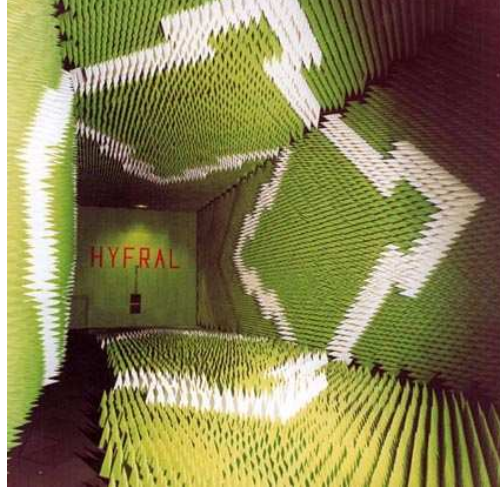
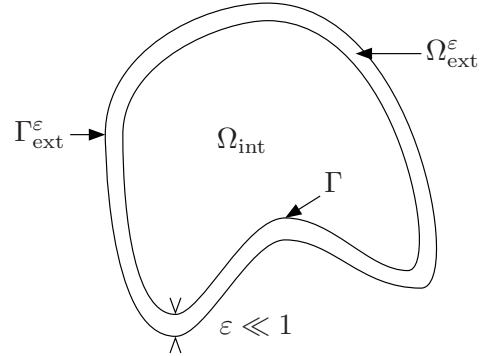


FIG. 1 – Une chambre anéchoïde.

## Conditions aux limites approchées pour le Laplacien

On s'intéresse au problème de transmission suivant, posé dans le domaine de la figure 2 ci-contre.

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon = f_{\text{ext}} & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon + g & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon. \end{cases}$$



Le coefficient  $\alpha$  est un nombre réel strictement positif ( $\alpha \neq 1$ ).

FIG. 2 – Le domaine régulier  $\Omega^\varepsilon$ .

Il constitue un modèle simple bidimensionnel pour les applications citées plus haut.

On souhaite trouver un problème proche de (1) dans lequel la couche mince n'apparaît plus. Précisément, on recherche une condition aux limites  $\text{CL}_\varepsilon(v, \partial_n v)$  telle que la solution  $v^\varepsilon$  de

$$\begin{cases} \alpha \Delta v^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \text{CL}_\varepsilon(v^\varepsilon, \partial_n v^\varepsilon) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

soit “proche” de  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  est voisin de 0.

Dans le cas d’un domaine régulier ( $\Gamma$  est une courbe lisse), des résultats sont connus depuis plus d’une dizaine d’années. Il est montré dans [16] que les choix suivants pour  $\text{CL}_\varepsilon$  (appelées *conditions aux limites approchées* ou *conditions d’impédance*) :

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_{[0]}^\varepsilon = 0, \\ (ii) \quad & v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon \alpha \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = \varepsilon g, \\ (iii) \quad & \left(1 + \varepsilon \frac{c(x)}{2}\right) v_{[2]}^\varepsilon + \varepsilon \alpha \partial_n v_{[2]}^\varepsilon = \varepsilon g, \end{aligned}$$

conduisaient à des problèmes bien posés, avec les estimations d’erreur

$$\begin{aligned} (i) \quad & \left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq \varepsilon, \\ (ii) \quad & \left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \\ (iii) \quad & \left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq \varepsilon^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

L’étude est menée pour l’équation de Helmholtz dans [16] et [7] et de nombreux auteurs se sont penchés sur d’autres problèmes, en particulier le système de Maxwell (voir [16], [6], [5], [18], etc.).

## Utilisation de l’analyse asymptotique double-échelle

Le premier chapitre de ce travail est consacré à l’investigation de conditions aux limites approchées pour le problème (1), dans le cas d’un domaine régulier, à l’aide d’une technique de développement asymptotique double-échelle. Le principe consiste à effectuer une dilatation de rapport  $\varepsilon^{-1}$  de la couche mince dans la direction normale. On transforme ainsi le domaine  $\Omega^\varepsilon$  en un domaine fixe et le petit paramètre  $\varepsilon$  n’apparaît plus dans la géométrie, mais dans les équations. On peut alors, à l’aide d’un procédé de résolution alternatif extérieur-intérieur, déterminer un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de transmission (1) qui a la forme

$$(2) \quad u^\varepsilon = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u^n + r_\varepsilon^N \quad \text{où} \quad u^n|_{\Omega_{\text{int}}} = u_{\text{int}}^n \quad \text{et} \quad u^n|_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon}(t, s) = U_{\text{ext}}^n(t, \varepsilon^{-1}s),$$

les fonctions  $u_{\text{int}}^n$  et  $U_{\text{ext}}^n$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$  et  $(t, s)$  est un système de coordonnées tangentielle-normale au bord  $\Gamma$ . Le terme “double-échelle” rend compte de

l'utilisation de coordonnées semi-dilatées dans le domaine extérieur. L'un des avantages des développements asymptotiques est de fournir une estimation optimale du reste :

$$\|r_{\varepsilon,\text{int}}^N\|_{1,\Omega_{\text{int}}} + \sqrt{\varepsilon} \|r_{\varepsilon,\text{ext}}^N\|_{1,\Omega_{\varepsilon,\text{ext}}} \leq C_N \varepsilon^{N+1}.$$

L'analyse des problèmes vérifiés par les  $(u_{\text{int}}^n)$  permet d'identifier les conditions aux limites approchées citées plus haut. L'intérêt principal de l'utilisation d'un développement asymptotique dans les problèmes de couche mince est l'obtention d'estimations optimales. On prouve ici les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq \varepsilon, \\ (ii) \quad & \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq \varepsilon^2, \\ (iii) \quad & \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq \varepsilon^3, \end{aligned}$$

qui sont plus fines que celles données dans [16].

### Cas d'un domaine à coin

Les applications en vue ne peuvent pas rentrer dans le cadre décrit précédemment car les géométries considérées ne sont pas régulières : elles comportent de nombreux coins et arêtes. Il n'existe, à notre connaissance, aucun résultat dans ce cadre.

L'objet principal de la thèse est l'analyse asymptotique du problème (1) dans le cas où le domaine  $\Omega_{\text{int}}$  est régulier sauf en un point  $O_{\text{int}}$ , au voisinage duquel il coïncide avec un secteur angulaire plan d'ouverture  $\omega$  (voir figure 3.1).

On exclut les cas des fissures ( $\omega = 0, 2\pi$ ) qui requièrent un modèle géométrique de couche mince différent. Leur étude est néanmoins similaire à celle présentée ici.

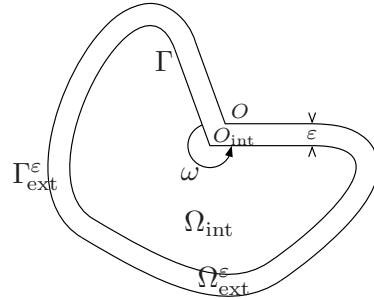


FIG. 3 – Le domaine  $\Omega^\varepsilon$ .

La technique employée dans le cas où  $\Gamma$  est régulière ne peut pas être utilisée directement dans cette nouvelle situation. En effet, la présence d'un coin dans le domaine fait apparaître des singularités qui compromettent la construction des termes  $u_{\text{int}}^n$  et  $U_{\text{ext}}^n$  ; elles sont de la forme

$$\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}} = \begin{cases} r^{\frac{q\pi}{\omega}} \cos \frac{q\pi}{\omega} \theta & \text{si } q \text{ est impair,} \\ r^{\frac{q\pi}{\omega}} \sin \frac{q\pi}{\omega} \theta & \text{si } q \text{ est pair,} \end{cases}$$

où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires centrées en  $O_{\text{int}}$  ( $-\frac{\omega}{2} \leq \theta \leq \frac{\omega}{2}$ ).

Le défaut de régularité des fonctions  $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  (en particulier dans le cas où  $\omega > \pi$ ) ne permet pas d'employer le procédé de résolution extérieur-intérieur car il "consomme" des dérivées. Précisément, si le second membre  $f_{\text{int}}$  est suffisamment régulier et plat au voisinage du coin, le terme  $u_{\text{int}}^0$  admet la décomposition suivante :

$$u_{\text{int}}^0 = u_{\text{plat,int}}^0 + \chi c_1^0 \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}} + \chi c_2^0 \mathfrak{s}^{\frac{2\pi}{\omega}} + \dots,$$

où  $\chi$  est une fonction de troncature localisée au coin et  $c_q^0$  sont des coefficients réels, appelés *coefficients de singularités*.

La partie régulière  $u_{\text{plat,int}}^0$  est plate au voisinage du coin  $O_{\text{int}}$  (i.e. s'annule en ce point ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un certain ordre), elle relève de l'étude faite dans le cas régulier. Notre technique consiste à utiliser le procédé de résolution extérieur-intérieur pour les termes plats et à prendre en compte les singularités directement.

Pour cela, on effectue une homothétie de centre  $O_{\text{int}}$  et de rapport  $\varepsilon^{-1}$ , qui a pour effet de transformer le domaine  $\Omega$  en un secteur plan infini avec couche mince d'épaisseur 1, quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0 (voir figure 4 ci-contre).

Soit  $\Lambda$  un exposant du type  $\frac{\pi}{\omega}$ ,  $\frac{2\pi}{\omega}$ , etc. La fonction singulière  $\mathfrak{s}^\Lambda$  résout le problème de Dirichlet homogène dans le domaine intérieur  $Q_{\text{int}}$ . Le problème qui nous intéresse ici est le problème de transmission lui-même, on considère donc la fonction  $\mathfrak{K}^\Lambda$ , solution du problème de transmission homogène dans le domaine  $Q = Q_{\text{int}} \cup G \cup Q_{\text{ext}}$ . De manière naturelle, on impose une condition à l'infini qui correspond au comportement de la singularité  $\mathfrak{s}^\Lambda$  :

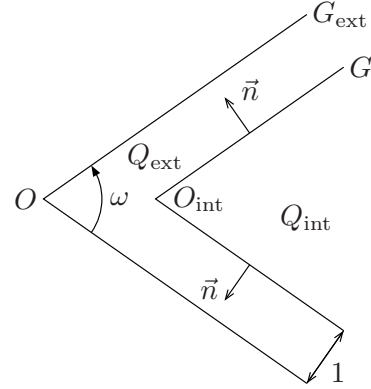


FIG. 4 – Le secteur infini  $Q$ .

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathfrak{K}_{\text{ext}}^\Lambda = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \alpha \Delta \mathfrak{K}_{\text{int}}^\Lambda = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathfrak{K}_{\text{ext}}^\Lambda = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{K}_{\text{int}}^\Lambda = \mathfrak{K}_{\text{ext}}^\Lambda & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{K}_{\text{int}}^\Lambda = \partial_n \mathfrak{K}_{\text{ext}}^\Lambda & \text{sur } G, \\ \mathfrak{K}_{\text{int}}^\Lambda \sim \mathfrak{s}^\Lambda & \text{quand } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Le chapitre 2 est consacré à la construction d'une solution au problème précédent dans le domaine infini  $Q$  et à son étude asymptotique quand  $r \rightarrow +\infty$ .

Précisément, on montre qu'il existe  $\mathfrak{K}^\Lambda$ , solution de (3), qui admet le développement suivant à l'infini,

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^\Lambda = & \mathfrak{K}^{\Lambda,\Lambda} + \mathfrak{K}^{\Lambda,\Lambda-1} + \mathfrak{K}^{\Lambda,\Lambda-2} + \dots \\ & + \mathfrak{K}^{\Lambda,-\frac{\pi}{\omega}} + \mathfrak{K}^{\Lambda,-\frac{\pi}{\omega}-1} + \mathfrak{K}^{\Lambda,-\frac{\pi}{\omega}-2} + \dots \\ & + \mathfrak{K}^{\Lambda,-\frac{2\pi}{\omega}} + \mathfrak{K}^{\Lambda,-\frac{2\pi}{\omega}-1} + \mathfrak{K}^{\Lambda,-\frac{2\pi}{\omega}-2} + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{K}^{\Lambda,\mu}$  a un comportement en  $r^\mu$  en l'infini.

Dans le chapitre 3, on construit un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de transmission (1) ; il est de la forme

$$\begin{aligned} (4) \quad u^\varepsilon = & u_{\text{plat}}^0 + \varepsilon u_{\text{plat}}^1 + \varepsilon u_{\text{plat}}^2 + \dots \\ & + \varepsilon^{\frac{2\pi}{\omega}} u_{\text{plat}}^{\frac{2\pi}{\omega}} + \varepsilon^{\frac{3\pi}{\omega}} u_{\text{plat}}^{\frac{3\pi}{\omega}} + \varepsilon^{1+\frac{2\pi}{\omega}} u_{\text{plat}}^{1+\frac{2\pi}{\omega}} + \dots \\ & + \chi c_1^0 \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{\pi}{\omega}} + \chi c_1^1 \varepsilon^{1+\frac{\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{1+\frac{\pi}{\omega}} + \dots \\ & + \chi c_2^0 \varepsilon^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{2\pi}{\omega}} + \dots \end{aligned}$$

avec

$$u_{\text{plat}}^\mu|_{\Omega_{\text{int}}} = u_{\text{plat,int}}^\mu \quad \text{et} \quad u_{\text{plat}}^\mu|_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon}(t, s) = U_{\text{plat,ext}}^\mu(t, \varepsilon^{-1}s).$$

Dans le cas où  $\frac{\pi}{\omega}$  est rationnel, des puissances de  $\log \varepsilon$  peuvent apparaître dans le développement asymptotique.

Les termes  $u_{\text{plat}}^\mu$  ont la même structure que dans le développement (2) ; les *profils*  $\mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  rendent compte du comportement singulier de  $u^\varepsilon$  au coin. De plus, la présence d'un coin dans le domaine donne naissance à des puissances non-entières de  $\varepsilon$  dans le développement. Remarquons enfin que le développement obtenu est triple-échelle : les coordonnées cartésiennes initiales (pour  $u_{\text{plat,int}}^\mu$ ), les variables semi-dilatées (pour  $u_{\text{plat,ext}}^\mu$ ), et  $\frac{r}{\varepsilon}$  (pour les profils).

L'objet du chapitre 4 de la thèse est l'étude de la performance de la condition d'impédance d'ordre 2 (correspondant à  $v_{[2]}^\varepsilon$ ) dans le cas d'un domaine à coin. On construit un développement asymptotique pour  $v_{[2]}^\varepsilon$ , qui a la même structure que le développement (4). Par différence, on obtient les estimations d'erreur *optimales* suivantes :

$$(5) \quad \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{0,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 1+\frac{\pi}{\omega}, 3)},$$

$$(6) \quad \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{\pi}{\omega}, 3)}.$$

Il apparaît que la performance se dégrade fortement quand l'angle  $\omega$  se rapproche de  $2\pi$ , alors qu'elle est la même que dans le cas régulier pour des ouvertures inférieures à  $\frac{\pi}{3}$ .

Les estimations (5) et (6) constituent un résultat nouveau, qui quantifie des phénomènes observés numériquement.

## Simulations numériques

À la fin des chapitres 1 et 4 sont présentés des résultats de calculs numériques effectués à l'aide de la bibliothèque éléments finis MÉLINA, voir [23]. Ils ont été menés sur le calculateur de l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan (IBM-Risc6000/AIX).

On montre qu'une approximation de très grande précision est requise pour mettre en évidence la convergence de la quantité  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Une interpolation de degré élevé (aussi bien des fonctions que de la géométrie, dans le cas d'une frontière courbe), combinée à un raffinement au voisinage du coin, permettent d'obtenir une approximation suffisante.

Une partie du travail de thèse a consisté à enrichir le code MÉLINA d'éléments finis nodaux quadrangulaires de haut degré ( $\mathbb{Q}_p$  pour  $p \leq 10$ ) et à lui adjoindre des modules de création et visualisation de maillages courbes de haut degré. On présente en annexe le travail effectué dans ce cadre.

Enfin, tous les dessins de ce document ont été effectués à l'aide de **fig4tex**, voir [21].



## Chapitre 1

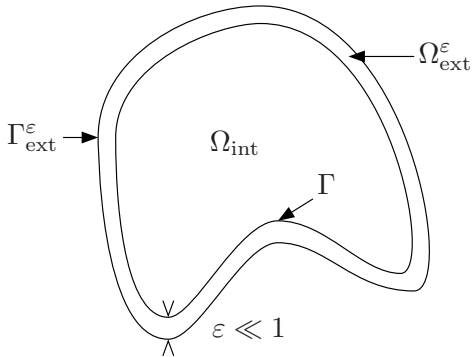
# Conditions d'impédance pour un domaine régulier

### 1.1 Introduction

On considère un domaine borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega_{\text{int}}$ , de bord  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ; pour  $x \in \Gamma$ , on note  $\vec{n}(x)$  la normale extérieure à  $\Omega_{\text{int}}$  au point  $x \in \Gamma$ . Pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , assez petit,  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  désigne la couche mince autour de  $\Omega_{\text{int}}$  d'épaisseur uniforme  $\varepsilon$ , destinée à tendre vers 0 :

$$\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon = \{x + s\vec{n}(x) \mid x \in \Gamma \text{ et } 0 < s < \varepsilon\}.$$

On appelle  $\Omega^\varepsilon = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  le domaine complet et  $\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$  son bord (voir figure ci-dessous).



On s'intéresse au problème de transmission suivant, posé dans le domaine régulier  $\Omega^\varepsilon$  :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon = f_{\text{ext}} & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon + g & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon, \end{cases}$$



où  $\partial_n$  désigne la dérivée normale selon  $\vec{n}$  (extérieure à  $\Omega_{\text{int}}$ , intérieure à  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ ) et  $\alpha$  est un réel strictement positif. Les données vérifient  $f_{\text{int}} \in L^2(\Omega_{\text{int}})$ ,  $g \in L^2(\Gamma)$  et  $f_{\text{ext}}$  est la restriction à  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  d'une fonction de  $L^2(\Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon_0})$ .

On souhaite remplacer l'effet de la couche mince par une condition aux limites, dite *condition aux limites généralisée* ou *condition d'impédance*. Plus précisément, on cherche une condition aux limites  $\text{CL}_\varepsilon(v, \partial_n v)$  telle que le problème

$$\begin{cases} \Delta v^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \text{CL}_\varepsilon(v^\varepsilon, \partial_n v^\varepsilon) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

soit bien posé et que sa solution  $v^\varepsilon$  soit “proche” (quand  $\varepsilon$  est voisin de 0) de  $u_{\text{int}}^\varepsilon$ , restriction intérieure de celle du problème (1.1). On va montrer qu'il est possible de trouver des conditions aux limites qui satisfont à cette exigence, la plus simple d'entre elles étant la condition de Dirichlet (tout se passe alors comme s'il n'y avait pas de couche mince). Des conditions de type Robin fournissent une meilleure approximation, comme le montre le tableau ci-dessous ( $c(x)$  désigne la courbure au point  $x$  de  $\Gamma$ ).

---

Condition $\text{CL}_\varepsilon$	$v_{[0]}^\varepsilon = 0$	$v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon \alpha \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = \varepsilon g$	$\left(1 + \varepsilon \frac{c(x)}{2}\right) v_{[2]}^\varepsilon + \varepsilon \alpha \partial_n v_{[2]}^\varepsilon = \varepsilon g$
$\left\  u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon \right\ _{1, \Omega_{\text{int}}}$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$

---

La technique employée dans [16] pour obtenir ces conditions est une méthode de Galerkin utilisant dans la couche mince des polynômes de degré 0, 1, 2 en la variable normale. On trouve dans [6] une ébauche de développement asymptotique dans le cas de problèmes périodiques, mais le développement n'est pas poursuivi ni validé. On présente ici une méthode plus systématique utilisant le formalisme des développements asymptotiques, qui offre en outre l'avantage de conduire à des estimations optimales.

## 1.2 Étude du problème de transmission

### 1.2.1 Existence et unicité

Le problème (1.1) s'écrit sous forme variationnelle :

$$(1.2) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega^\varepsilon), \quad a(u^\varepsilon, w) = \langle F, w \rangle,$$

avec

$$a(u, w) = \alpha \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla u \nabla w \, dx + \int_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} \nabla u \nabla w \, dx$$

et

$$\langle F, w \rangle = - \int_{\Omega_{\text{int}}} f_{\text{int}} w \, dx - \int_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} f_{\text{ext}} w \, dx + \int_{\Gamma} g w \, d\sigma.$$

**Théorème 1.1** *Si  $f_{\text{int}} \in L^2(\Omega_{\text{int}})$ ,  $f_{\text{ext}} \in L^2(\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon)$  et  $g \in L^2(\Gamma)$ , alors le problème variationnel (1.2) admet une unique solution  $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ . De plus il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , telle que*

$$\|u^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq C \left( \|f_{\text{int}}\|_{0,\Omega_{\text{int}}} + \|f_{\text{ext}}\|_{0,\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|g\|_{0,\Gamma} \right).$$

DÉMONSTRATION. On note  $V = H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ ; la forme bilinéaire  $a$  est clairement continue sur  $V \times V$ . De plus, on peut écrire une inégalité de Poincaré uniforme en  $\varepsilon$  dans  $V$  (car la mesure de  $\Omega^\varepsilon$  est majorée indépendamment de  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ) : il existe une constante  $\kappa$ , indépendante de  $\varepsilon$  telle que

$$\forall w \in V, \quad \|w\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 \leq \kappa \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w|^2 \, dx.$$

On en déduit immédiatement la coercivité uniforme de  $a$  :

$$(1.3) \quad \forall w \in V, \quad a(w, w) \geq \frac{1}{\kappa} \min(1, \alpha) \|w\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2.$$

D'autre part,

$$\forall w \in V, \quad |\langle F, w \rangle| \leq \|f_{\text{int}}\|_{0,\Omega_{\text{int}}} \|w\|_{0,\Omega_{\text{int}}} + \|f_{\text{ext}}\|_{0,\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} \|w\|_{0,\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|g\|_{0,\Gamma} \|w\|_{0,\Gamma},$$

donc la forme linéaire  $F$  est continue sur  $V$  (il suffit d'utiliser l'inégalité de trace  $\|w\|_{0,\Gamma} \leq c \|w\|_{1,\Omega_{\text{int}}}$ ) : il existe une constante  $k$  telle que

$$(1.4) \quad \forall w \in V, \quad |\langle F, w \rangle| \leq k \left( \|f_{\text{int}}\|_{0,\Omega_{\text{int}}} + \|f_{\text{ext}}\|_{0,\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|g\|_{0,\Gamma} \right) \|w\|_{1,\Omega^\varepsilon}.$$

Par utilisation du théorème de Lax-Milgram, on assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.2); l'estimation a priori annoncée découle immédiatement des inégalités (1.3) et (1.4). ■

L'estimation obtenue est assez grossière quant à la dépendance en  $\varepsilon$ , mais elle nous suffira pour établir la convergence du développement asymptotique au paragraphe 1.3.

### 1.2.2 Régularité elliptique au voisinage du bord

Dans les équations (1.1), on sera amené à considérer des seconds membres plus réguliers que dans le théorème 1.1. On peut alors préciser la régularité de la solution  $u^\varepsilon$ . Le but de ce paragraphe est d'obtenir des estimations au voisinage du bord. On pourra consulter [2] pour le traitement du problème de Dirichlet pour le Laplacien sans condition de transmission ni couche mince. On pourra utilement se reporter à [1], [10], [14], [15] et [22] pour tous les résultats concernant les espaces de Sobolev.

On se placera dans tout le paragraphe dans le cas d'un bord droit, le cas général s'en déduisant par cartes locales.

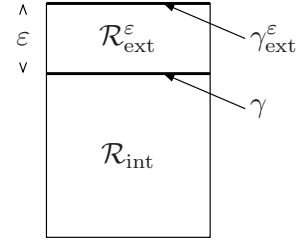
#### Notations

On note  $\mathcal{R}_{\text{int}} = (-1, 1) \times (-1, 1)$  le carré unité,  $\mathcal{R}_{\text{ext}}^\varepsilon$  le rectangle mince  $(-1, 1) \times (1, 1 + \varepsilon)$ ,  $\gamma$  le segment  $(-1, 1) \times \{1\}$  et  $\gamma_{\text{ext}}^\varepsilon = (-1, 1) \times \{1 + \varepsilon\}$  (voir figure ci-contre).

Le domaine complet est noté  $\mathcal{R}^\varepsilon$  :

$$\overline{\mathcal{R}^\varepsilon} = \overline{\mathcal{R}_{\text{int}} \cup \mathcal{R}_{\text{ext}}^\varepsilon} ;$$

il constitue un modèle local de  $\Omega^\varepsilon$  au voisinage du bord.



Afin d'éliminer les conditions aux limites sur  $\partial\mathcal{R}^\varepsilon \setminus \gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$ , on aura besoin des domaines  $\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$  et  $\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$  définis de la même façon que  $\mathcal{R}^\varepsilon$  :

$$\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon = (-2, 2) \times (-2, 1 + \varepsilon), \quad \tilde{\gamma} = (-2, 2) \times \{1\} \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}_{\text{ext}}^\varepsilon = (-2, 2) \times \{1 + \varepsilon\},$$

$$\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon = (-3, 3) \times (-3, 1 + \varepsilon), \quad \hat{\gamma} = (-3, 3) \times \{1\} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}_{\text{ext}}^\varepsilon = (-3, 3) \times \{1 + \varepsilon\},$$

ainsi que de la fonction de troncature  $\chi$  définie par

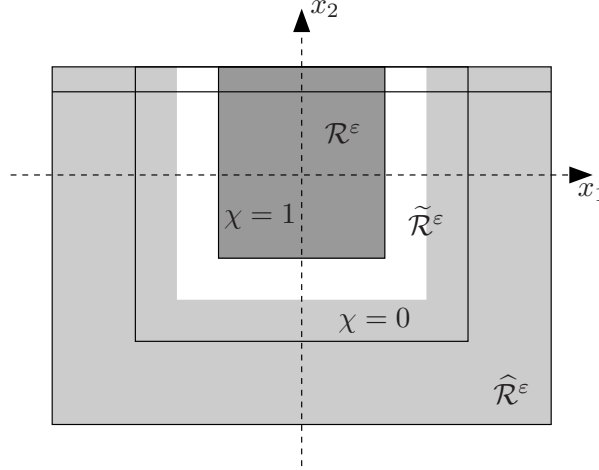
$$\chi(x) = \chi_1(x_1) \chi_2(x_2),$$

où  $\chi_1 \in \mathcal{C}^\infty([-2, 2])$  et  $\chi_2 \in \mathcal{C}^\infty([-2, 1 + \varepsilon])$  sont telles que

$$\chi_1(x_1) = 1 \text{ si } |x_1| \leq 1 \text{ et } \chi_1(x_1) = 0 \text{ si } |x_1| \geq \frac{3}{2}$$

$$\chi_2(x_2) = 1 \text{ si } x_2 \geq -1 \text{ et } \chi_2(x_2) = 0 \text{ si } x_2 \leq -\frac{3}{2}$$

En particulier  $\chi|_{\mathcal{R}^\varepsilon} = 1$  et  $\chi|_{\widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon \setminus \widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} = 0$ .



Si  $\mathcal{S}^\varepsilon$  est un sous-domaine de  $\widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ , on note  $\gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon} = \partial\mathcal{S} \cap \widehat{\gamma}$  et  $\gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon, \text{ext}}^\varepsilon = \partial\mathcal{S}^\varepsilon \cap \widehat{\gamma}_{\text{ext}}^\varepsilon$ . Enfin on introduit une relation d'ordre entre deux sous-domaines  $\mathcal{S}^\varepsilon$  et  $\mathcal{T}^\varepsilon$  de  $\widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon$  :

$$\mathcal{S}^\varepsilon \sqsubseteq \mathcal{T}^\varepsilon \quad \text{ssi} \quad \left( \mathcal{S}^\varepsilon \subseteq \mathcal{T}^\varepsilon \quad \text{et} \quad \partial\mathcal{T}^\varepsilon \cap \overline{\mathcal{S}}^\varepsilon = \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon, \text{ext}}^\varepsilon \right).$$

Cette définition signifie que  $\mathcal{T}^\varepsilon$  “déborde” de  $\mathcal{S}^\varepsilon$  sauf le long du bord supérieur  $\widehat{\gamma}_{\text{ext}}^\varepsilon$ . Les ensembles introduits précédemment sont ordonnés comme suit :

$$\mathcal{R}^\varepsilon \sqsubseteq \widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon \sqsubseteq \widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon.$$

**Estimation**  $H^{-1} \rightarrow H_0^1$

Dans les deux propositions qui suivent, le domaine  $\mathcal{S}^\varepsilon$  vérifie  $\mathcal{R}^\varepsilon \sqsubseteq \mathcal{S}^\varepsilon \sqsubseteq \widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ .

**Proposition 1.2** *Si  $F \in H^{-1}(\mathcal{S}^\varepsilon)$ , alors le problème*

$$\forall w \in H_0^1(\mathcal{S}^\varepsilon), \quad a(u, w) = \langle F, w \rangle$$

*admet une unique solution  $u \in H_0^1(\mathcal{S}^\varepsilon)$  et il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\varepsilon$ , telle que*

$$\|u\|_{1, \mathcal{S}^\varepsilon} \leq C \|F\|_{-1, \mathcal{S}^\varepsilon}.$$

**DÉMONSTRATION.** Il s'agit d'une application du théorème de Lax-Milgram, la forme  $a$  étant continue et coercive sur  $H_0^1(\mathcal{S}^\varepsilon)$  (voir la démonstration du théorème 1.1). ■

Si  $u$  est une fonction définie sur  $\mathcal{S}^\varepsilon$ , on définit la distribution  $F_u$  par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{S}^\varepsilon), \quad \langle F_u, \varphi \rangle = - \int_{\mathcal{S}_{\text{int}}} \Delta u_{\text{int}} \varphi \, dx - \int_{\mathcal{S}_{\text{ext}}^\varepsilon} \Delta u_{\text{ext}} \varphi \, dx + \int_{\gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}} (\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}) \varphi \, d\sigma.$$

**Proposition 1.3** *Si  $u$  vérifie les hypothèses  $\Delta u_{\text{int}} \in L^2(\mathcal{S}_{\text{int}})$ ,  $\Delta u_{\text{ext}} \in L^2(\mathcal{S}_{\text{ext}}^\varepsilon)$  et  $\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}} \in L^2(\gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon})$ , alors  $F_u \in H^{-1}(\mathcal{S}^\varepsilon)$  et il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\|F_u\|_{-1, \mathcal{S}^\varepsilon} \leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{0, \mathcal{S}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{0, \mathcal{S}_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{0, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}} \right].$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{S}^\varepsilon)$ , alors par une majoration immédiate

$$\begin{aligned} |\langle F_u, \varphi \rangle| &\leq \|\Delta u_{\text{int}}\|_{0, \mathcal{S}_{\text{int}}} \|\varphi\|_{0, \mathcal{S}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{0, \mathcal{S}_{\text{ext}}^\varepsilon} \|\varphi\|_{0, \mathcal{S}_{\text{ext}}} \\ &\quad + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{0, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}} \|\varphi\|_{0, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Les normes  $L^2$  de  $\varphi$  sur les domaines  $\mathcal{S}_{\text{int}}$  et  $\mathcal{S}_{\text{ext}}^\varepsilon$  se majorent par la norme  $H^1$  sur le domaine entier  $\mathcal{S}^\varepsilon$ . En utilisant l'inégalité de trace  $\|v\|_{0, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}} \leq C \|v\|_{1, \mathcal{S}_{\text{int}}}$ , on en déduit :

$$|\langle F_u, \varphi \rangle| \leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{0, \mathcal{S}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{0, \mathcal{S}_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{0, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}} \right] \|\varphi\|_{1, \mathcal{S}^\varepsilon},$$

estimation qui se prolonge pour  $\varphi \in H_0^1(\mathcal{S}^\varepsilon)$ , d'où le résultat. ■

**Estimation  $H^{-1} \rightarrow H^1$  avec condition de Dirichlet sur le bord supérieur**

Soient  $\mathcal{S}^\varepsilon$  et  $\mathcal{T}^\varepsilon$  deux sous-domaines vérifiant  $\mathcal{R}^\varepsilon \subseteq \mathcal{S}^\varepsilon \subseteq \mathcal{T}^\varepsilon$  et  $\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon \subseteq \mathcal{T}^\varepsilon \subseteq \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ .

**Proposition 1.4** *Soit  $u \in H^1(\mathcal{T}^\varepsilon)$  tel que  $u = 0$  sur  $\gamma_{\mathcal{T}^\varepsilon, \text{ext}}^\varepsilon$ ,  $\Delta u_{\text{int}} \in L^2(\mathcal{T}_{\text{int}})$ ,  $\Delta u_{\text{ext}} \in L^2(\mathcal{T}_{\text{ext}}^\varepsilon)$  et  $\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}} \in L^2(\gamma_{\mathcal{T}^\varepsilon})$ , alors il existe une constante  $C$ , indépendante de  $\varepsilon$ , telle que*

$$(1.5) \quad \|u\|_{1, \mathcal{S}^\varepsilon} \leq C \left[ \|F_u\|_{-1, \mathcal{T}^\varepsilon} + \|u\|_{0, \mathcal{T}^\varepsilon} \right].$$

DÉMONSTRATION. On tronque la fonction  $u$  à l'aide de  $\chi : \chi u \in H_0^1(\mathcal{T}^\varepsilon)$  vérifie les hypothèses de la proposition 1.2 dans le domaine  $\mathcal{T}^\varepsilon$ . Il reste à estimer  $F_{\chi u}$  : soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\varepsilon)$ , un calcul simple montre que

$$\langle F_{\chi u}, \varphi \rangle = \langle F_u, \chi \varphi \rangle - \langle G_0(\chi, u), \varphi \rangle - \langle G_1(\chi, u), \varphi \rangle,$$

où  $G_0(\chi, u)$  et  $G_1(\chi, u)$  sont définies par

$$\begin{aligned}\langle G_0(\chi, u), \varphi \rangle &= \int_{\mathcal{T}_{\text{int}}} \Delta \chi u_{\text{int}} \varphi \, dx + \int_{\mathcal{T}_{\text{ext}}^\varepsilon} \Delta \chi u_{\text{ext}} \varphi \, dx, \\ \langle G_1(\chi, u), \varphi \rangle &= 2 \int_{\mathcal{T}_{\text{int}}} \nabla \chi \cdot \nabla u_{\text{int}} \varphi \, dx + 2 \int_{\mathcal{T}_{\text{ext}}^\varepsilon} \nabla \chi \cdot \nabla u_{\text{ext}} \varphi \, dx.\end{aligned}$$

La partie  $G_0$  se majore immédiatement :

$$|\langle G_0(\chi, u), \varphi \rangle| \leq C \|u\|_{0, \mathcal{T}^\varepsilon} \|\varphi\|_{0, \mathcal{T}^\varepsilon}.$$

Quant à  $G_1$  qui contient des gradients, il faut l'intégrer par parties. On détaille le cas intérieur (le cas extérieur se traite de la même manière) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}_{\text{int}}} \partial_1 \chi \partial_1 u_{\text{int}} \varphi &= \int_{-3}^1 \chi_2 \int_{-3}^3 \chi_1' \partial_1 u_{\text{int}} \varphi \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \int_{-3}^1 \chi_2 \left( \left[ \chi_1' u_{\text{int}} \varphi \right]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 u_{\text{int}} \partial_1 (\varphi \chi_1') \, dx_1 \right) dx_2.\end{aligned}$$

Le terme entre crochets est nul donc on obtient la majoration

$$\left| \int_{\mathcal{T}_{\text{int}}} \partial_1 \chi \partial_1 u_{\text{int}} \varphi \right| \leq C \|u_{\text{int}}\|_{0, \mathcal{T}_{\text{int}}} \|\varphi\|_{1, \mathcal{T}_{\text{int}}}.$$

De la même façon, on écrit

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}_{\text{int}}} \partial_2 \chi \partial_2 u_{\text{int}} \varphi &= \int_{-3}^3 \chi_1 \int_{-3}^1 \chi_2' \partial_2 u_{\text{int}} \varphi \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_{-3}^3 \chi_1 \left( \left[ \chi_2' u_{\text{int}} \varphi \right]_{-3}^1 - \int_{-3}^1 u_{\text{int}} \partial_2 (\varphi \chi_2') \, dx_2 \right) dx_1.\end{aligned}$$

Le crochet s'annule ici encore, donc on a aussi

$$\left| \int_{\mathcal{T}_{\text{int}}} \partial_2 \chi \partial_2 u_{\text{int}} \varphi \right| \leq C \|u_{\text{int}}\|_{0, \mathcal{T}_{\text{int}}} \|\varphi\|_{1, \mathcal{T}_{\text{int}}}.$$

On obtient ainsi une estimation pour  $G_1$  :

$$|\langle G_1(\chi, u), \varphi \rangle| \leq C \|u\|_{0, \mathcal{T}^\varepsilon} \|\varphi\|_{1, \mathcal{T}^\varepsilon}.$$

On peut alors conclure :

$$|\langle F_{\chi u}, \varphi \rangle| \leq C \left[ \|F_u\|_{-1, \mathcal{T}^\varepsilon} + \|u\|_{0, \mathcal{T}^\varepsilon} \right] \|\varphi\|_{1, \mathcal{T}^\varepsilon}.$$

Le résultat s'en déduit par application de la proposition 1.2 sur  $\mathcal{T}^\varepsilon$ . ■

**Estimation**  $H^s \rightarrow H^{s+2}$

On a obtenu une estimation de type  $H^{-1} \rightarrow H^1$ . La méthode des translations permet d'en déduire une estimation  $H^s \rightarrow H^{s+2}$ .

Pour une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{T}^\varepsilon$  et  $h \in \mathbb{R}$ , on note  $D_h \varphi$  le quotient différentiel dans la direction tangentielle :

$$\forall x \in \mathcal{S}^\varepsilon, D_h \varphi(x) = \frac{\varphi(x + h\vec{e}_1) - \varphi(x)}{h}.$$

**Lemme 1.5** *Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Pour  $h$  assez petit, on a les résultats suivants.*

- *Il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall \varphi \in H^{m+1}(\mathcal{T}^\varepsilon), \|D_h \varphi\|_{m, \mathcal{S}^\varepsilon} \leq C \|\varphi\|_{m+1, \mathcal{T}^\varepsilon}.$$

- *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $\varphi$  à support compact dans  $\gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}$  vérifiant  $D_h \varphi \in \mathcal{D}(\gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon})$  on ait*

$$\|D_h \varphi\|_{m-\frac{1}{2}, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}} \leq C \|\varphi\|_{m+\frac{1}{2}, \gamma_{\mathcal{S}^\varepsilon}}.$$

DÉMONSTRATION.

- Par densité, il suffit de montrer le résultat pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon)$ . Pour tout multi-indice  $\beta$ ,

$$\partial^\beta D_h \varphi(x) = D_h \partial^\beta \varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1+h} \partial_1 \partial^\beta \varphi(\zeta, x_2) d\zeta.$$

On calcule ensuite la norme  $L^2$  de  $\partial^\beta D_h \varphi$  : pour  $h$  assez petit,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 |\partial^\beta D_h \varphi(x)|^2 dx_1 &\leq \frac{C}{h} \int_{-3}^3 \int_{x_1}^{x_1+h} |\partial_1 \partial^\beta \varphi(\zeta, x_2)|^2 d\zeta dx_1 \\ &= \frac{C}{h} \int_{-3}^{3+h} |\partial_1 \partial^\beta \varphi(\zeta, x_2)|^2 \int_{\max(-2, \zeta-h)}^{\min(2, \zeta)} dx_1 d\zeta \\ &\leq C \int_{-2}^{2+h} |\partial_1 \partial^\beta \varphi(\zeta, x_2)|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'intégrer par rapport à la variable verticale, pour obtenir

$$\|\partial^\beta D_h \varphi\|_{0, \mathcal{S}^\varepsilon} \leq C \|\partial^\beta \varphi\|_{1, \mathcal{T}^\varepsilon},$$

d'où le résultat.

- On peut prolonger  $\varphi$  en une fonction, encore notée  $\varphi$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , à support compact. On utilise alors la transformation de Fourier : pour  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\varphi\|_{s, \gamma_{S^\varepsilon}} = \|\varphi\|_{s, \mathbb{R}} = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, puisque  $D_h \varphi$  est aussi à support compact dans  $\gamma_{S^\varepsilon}$ ,

$$\|D_h \varphi\|_{m-\frac{1}{2}, \gamma_{S^\varepsilon}} = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} \widehat{D_h \varphi} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Or  $\widehat{D_h \varphi}(\xi) = \frac{e^{ih\xi}-1}{h} \hat{\varphi}(\xi)$  et il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$  telle que

$$\left| \frac{e^{ih\xi}-1}{h} \right| \leq C (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\|D_h \varphi\|_{m-\frac{1}{2}, \gamma_{S^\varepsilon}} \leq C \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m+1}{2}-\frac{1}{4}} \hat{\varphi} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = C \|\varphi\|_{m+\frac{1}{2}, \gamma_{S^\varepsilon}},$$

ce qui est bien le résultat annoncé. ■

La proposition qui suit constitue le résultat central de ce paragraphe, on pourra trouver dans [3] et [4] des résultats similaires.

**Proposition 1.6** *Si  $u \in H^1(\widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon)$  est tel que  $u|_{\widehat{\gamma}_{\text{ext}}^\varepsilon} = 0$  et, pour  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta u_{\text{int}} \in H^s(\widehat{\mathcal{R}}_{\text{int}})$ ,  $\Delta u_{\text{ext}} \in H^s(\widehat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon)$  et  $\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}} \in H^{s+\frac{1}{2}}(\widehat{\gamma})$ , alors*

$$u_{\text{int}} \in H^{s+2}(\mathcal{R}_{\text{int}}) \quad \text{et} \quad u_{\text{ext}} \in H^{s+2}(\mathcal{R}_{\text{ext}}^\varepsilon),$$

avec l'estimation uniforme en  $\varepsilon$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \|u_{\text{int}}\|_{s+2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \|u_{\text{ext}}\|_{s+2, \mathcal{R}_{\text{ext}}^\varepsilon} &\leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{s, \widehat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{s, \widehat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{s+\frac{1}{2}, \widehat{\gamma}} + \|u\|_{0, \widehat{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Effectuons une démonstration par récurrence sur  $s \in \mathbb{N}$  :

- Pour  $s = 0$ , on applique la proposition 1.4 à  $u_h = \chi_1 D_h(\chi_1 u)$  pour les domaines  $\mathcal{S}^\varepsilon = \mathcal{R}^\varepsilon$  et  $\mathcal{T} = \widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$  (on rappelle que  $\chi_1$  est une fonction de troncature dans la direction  $x_1$  telle que  $\chi_1|_{\mathcal{R}_{\text{int}}} = 1$ ) ; notons que pour  $|h| < \frac{1}{2}$ ,  $u_h$  est à support dans  $\widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$ .

$$(1.7) \quad \|u_h\|_{1, \mathcal{R}^\varepsilon} \leq C \left[ \|F_{u_h}\|_{-1, \widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} + \|u_h\|_{0, \widetilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right].$$



On doit alors estimer  $F_{u_h}$  dans la norme  $H^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon)$  : soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon)$ , on notera encore  $\varphi$  son prolongement par 0 à  $\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ .

$$\langle F_{u_h}, \varphi \rangle = \langle F_{D_h(\chi_1 u)}, \chi_1 \varphi \rangle + \langle G, \varphi \rangle,$$

la distribution  $G$  provient de la dérivation de la fonction de troncature :

$$\begin{aligned} \langle G, \varphi \rangle = & - \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \Delta \chi_1 D_h(\chi_1 u_{\text{int}}) \varphi \, dx - \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \Delta \chi_1 D_h(\chi_1 u_{\text{ext}}) \varphi \, dx \\ & - 2 \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \nabla \chi_1 \cdot \nabla D_h(\chi_1 u_{\text{int}}) \varphi \, dx - 2 \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \nabla \chi_1 \cdot \nabla D_h(\chi_1 u_{\text{ext}}) \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Or la translation commute avec le Laplacien (c'est un opérateur à coefficients constants) et avec la dérivation normale (la translation est tangentielle). De plus si  $D_h f$  et  $D_{-h} g$  sont à support dans  $\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$ , on a la formule d'intégration par parties discrète :

$$\int_{\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} (D_h f) g \, dx = - \int_{\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} f (D_{-h} g) \, dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle G, \varphi \rangle = & \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} (\chi_1 u_{\text{int}}) D_{-h}(\Delta \chi_1 \varphi) \, dx + \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} (\chi_1 u_{\text{ext}}) D_{-h}(\Delta \chi_1 \varphi) \, dx \\ & + 2 \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \nabla(\chi_1 u_{\text{int}}) \cdot D_{-h}(\nabla \chi_1 \varphi) \, dx + 2 \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \nabla(\chi_1 u_{\text{ext}}) \cdot D_{-h}(\nabla \chi_1 \varphi) \, dx. \end{aligned}$$

On peut donc majorer la norme  $H^{-1}$  de la distribution  $G$  :

$$(1.8) \quad \|G\|_{-1, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} \leq C \|u\|_{1, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon}.$$

La même technique peut être appliquée au terme  $\langle F_{D_h(\chi_1 u)}, \chi_1 \varphi \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle F_{D_h(\chi_1 u)}, \chi_1 \varphi \rangle = & - \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \Delta (D_h(\chi_1 u_{\text{int}})) \chi_1 \varphi \, dx - \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \Delta (D_h(\chi_1 u_{\text{ext}})) \chi_1 \varphi \, dx \\ & + \int_{\tilde{\gamma}} (\alpha \partial_n D_h(\chi_1 u_{\text{int}}) - \partial_n D_h(\chi_1 u_{\text{ext}})) \chi_1 \varphi \, d\sigma, \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} \langle F_{D_h(\chi_1 u)}, \chi_1 \varphi \rangle = & \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \Delta(\chi_1 u_{\text{int}}) D_{-h}(\chi_1 \varphi) \, dx + \int_{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \Delta(\chi_1 u_{\text{ext}}) D_{-h}(\chi_1 \varphi) \, dx \\ & - \int_{\tilde{\gamma}} \chi_1 (\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}) D_{-h}(\chi_1 \varphi) \, d\sigma. \end{aligned}$$

De plus,  $\chi_1 (\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}})$  s'annule aux extrémités de  $\tilde{\gamma}$  donc

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}} \chi_1 (\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}) D_{-h}(\chi_1 \varphi) dx \right| \leq \|\chi_1 (\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}})\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} \|D_{-h}(\chi_1 \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \langle F_{D_h(\chi_1 u)}, \chi_1 \varphi \rangle \right| &\leq C \left[ \|\Delta(\chi_1 u_{\text{int}})\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \|D_{-h}(\chi_1 \varphi)\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \right. \\ &\quad \left. + \|\Delta(\chi_1 u_{\text{ext}})\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \|D_{-h}(\chi_1 \varphi)\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} \|D_{-h}(\chi_1 \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.5, on peut majorer  $\|D_{-h}(\chi_1 \varphi)\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon}$  par  $\|\varphi\|_{1, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon}$  et  $\|D_{-h}(\chi_1 \varphi)\|_{-\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}}$  par  $\|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}}$ . En utilisant l'inégalité de trace

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} \leq C \|\varphi\|_{1, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}},$$

et en tenant compte de (1.8), on obtient

$$\|F_{u_h}\|_{-1, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} \leq C \left[ \|\Delta(u_{\text{int}})\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta(u_{\text{ext}})\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} + \|u\|_{1, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right].$$

Soit  $\omega$  un ouvert tel que  $\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon \subseteq \omega \subseteq \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ . La majoration  $\|u_h\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} \leq \|u\|_{1, \omega}$  (voir lemme 1.5) permet de déduire de (1.7)

$$\|D_h u\|_{1, \mathcal{R}^\varepsilon} \leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} + \|u\|_{1, \omega} \right].$$

En passant à la limite  $h \rightarrow 0$ , on obtient une estimation pour toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 de  $u$  sauf  $\partial_2^2 u$ , dérivée deux fois selon la direction verticale (car la translation est tangentielle). Cette dernière s'évalue en utilisant l'opérateur :

$$\partial_2^2 u_{\text{int}} = \Delta u_{\text{int}} - \partial_1^2 u_{\text{int}} \quad \text{et} \quad \partial_2^2 u_{\text{ext}} = \Delta u_{\text{ext}} - \partial_1^2 u_{\text{ext}}$$

d'où l'estimation en norme  $H^2$  sur les deux sous-domaines  $\mathcal{R}_{\text{int}}$  et  $\mathcal{R}_{\text{ext}}^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \|u_{\text{int}}\|_{2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \|u_{\text{ext}}\|_{2, \mathcal{R}_{\text{ext}}^\varepsilon} &\leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} + \|u\|_{1, \omega} \right]. \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'estimation  $H^{-1} \rightarrow H^1$  (1.5) (pour  $\mathcal{S}^\varepsilon = \omega$  et  $\mathcal{T}^\varepsilon = \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ ) qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \|u\|_{1, \omega} &\leq C \left[ \|F_u\|_{-1, \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon} + \|u\|_{0, \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right] \\ &\leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^\varepsilon} + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|u\|_{0, \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

d'où l'estimation annoncée pour  $s = 0$ .

• Supposons connue une estimation  $H^{s-1} \rightarrow H^{s+1}$  suivante : pour tous sous-domaines  $\mathcal{S}^\varepsilon, \mathcal{T}^\varepsilon$  tels que  $\mathcal{R}^\varepsilon \subseteq \mathcal{S}^\varepsilon \subseteq \mathcal{T}^\varepsilon \subseteq \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$  et toute fonction  $v$  suffisamment régulière,

$$\begin{aligned} \|v_{\text{int}}\|_{s+1, \mathcal{S}_{\text{int}}} + \|v_{\text{ext}}\|_{s+1, \mathcal{S}_{\text{ext}}} &\leq C \left[ \|\Delta v_{\text{int}}\|_{s-1, \mathcal{T}_{\text{int}}} + \|\Delta v_{\text{ext}}\|_{s-1, \mathcal{T}_{\text{ext}}} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n v_{\text{int}} - \partial_n v_{\text{ext}}\|_{s-\frac{1}{2}, \gamma_{\mathcal{T}^\varepsilon}} + \|v\|_{0, \mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

Soit alors  $\omega$  vérifiant  $\mathcal{R}^\varepsilon \subseteq \omega \subseteq \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$ . On applique l'estimation ci-dessus pour  $\mathcal{S}^\varepsilon = \mathcal{R}^\varepsilon$  et  $\mathcal{T}^\varepsilon = \omega$  à  $v = u_h = \chi_1 D_h(\chi_1 u)$  :

$$\begin{aligned} \|u_{h, \text{int}}\|_{s+1, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \|u_{h, \text{ext}}\|_{s+1, \mathcal{R}_{\text{ext}}} &\leq C \left[ \|\Delta u_{h, \text{int}}\|_{s-1, \omega_{\text{int}}} + \|\Delta u_{h, \text{ext}}\|_{s-1, \omega_{\text{ext}}} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n u_{h, \text{int}} - \partial_n u_{h, \text{ext}}\|_{s-\frac{1}{2}, \gamma_\omega} + \|u_h\|_{0, \omega} \right]. \end{aligned}$$

À l'aide des techniques utilisées dans le cas  $s = 0$ , on montre les estimations suivantes :

- $\|\Delta u_{h, \text{int}}\|_{s-1, \omega_{\text{int}}} \leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{s, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|u\|_{s+1, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \right] ;$
- $\|\Delta u_{h, \text{ext}}\|_{s-1, \omega_{\text{ext}}} \leq C \left[ \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{s, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} + \|u\|_{s+1, \mathcal{R}_{\text{ext}}} \right] ;$
- $\|\alpha \partial_n u_{h, \text{int}} - \partial_n u_{h, \text{ext}}\|_{s-\frac{1}{2}, \gamma_\omega} \leq C \left[ \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{s+\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} \right].$

D'où

$$\begin{aligned} \|u_{\text{int}}\|_{s+2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \|u_{\text{ext}}\|_{s+2, \mathcal{R}_{\text{ext}}} &\leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{s, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{s, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{s+\frac{1}{2}, \tilde{\gamma}} + \|u_{\text{int}}\|_{s+1, \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

On utilise alors à nouveau l'estimation  $H^{s-1} \rightarrow H^{s+1}$ , appliquée à  $v = u$  pour  $\mathcal{S}^\varepsilon = \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$  et  $\mathcal{T}^\varepsilon = \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \|u_{\text{int}}\|_{s+1, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|u_{\text{ext}}\|_{s+1, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} &\leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{s-1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{s-1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{s+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|u\|_{0, \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right] \\ &\leq C \left[ \|\Delta u_{\text{int}}\|_{s, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\Delta u_{\text{ext}}\|_{s, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right. \\ &\quad \left. + \|\alpha \partial_n u_{\text{int}} - \partial_n u_{\text{ext}}\|_{s+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|u\|_{0, \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

## 1.3 Construction du développement asymptotique

### 1.3.1 Préliminaires

#### Le repère de Frénet

Pour construire le développement asymptotique de  $u^\varepsilon$  en le petit paramètre  $\varepsilon$ , on va d'abord transformer le domaine  $\Omega^\varepsilon$  en un domaine fixe. Pour cela, on utilise une paramétrisation de  $\Gamma$  en coordonnées locales  $(t, s)$  dans le repère de Frénet (voir [8]).

On paramètre  $\Gamma$  par  $\gamma(t)$ , où  $t$  est l'abscisse curviligne. On note  $\vec{\tau}$  et  $\vec{n}$  les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal (extérieur à  $\Omega_{\text{int}}$ ) sur  $\Gamma$ ; ils sont directement orthogonaux :

$$\vec{\tau} \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle les formules de Frénet qui définissent la courbure  $c(t)$  au point d'abscisse curviligne  $t$  (si  $\Omega_{\text{int}}$  est convexe, la courbure est positive) :

$$(1.9) \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = -c(t)\vec{n} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = c(t)\vec{\tau}.$$

#### Expression du Laplacien en coordonnées locales

Les formules de Frénet (1.9) permettent d'exprimer les dérivées selon  $t, s$  en fonction des dérivées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + sc(t))n_2 & -(1 + sc(t))n_1 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}.$$

Par inversion de ce système, on obtient

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_2}{1+sc(t)} & n_1 \\ \frac{-n_1}{1+sc(t)} & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_s \end{pmatrix},$$

d'où l'expression du Laplacien dans les variables  $(t, s)$  :

$$(1.10) \quad \Delta = \frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \left( \frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right) + \frac{c(t)}{1+sc(t)} \partial_s + \partial_s^2.$$

**Remarque.** L'expression  $\frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \left( \frac{1}{1+sc(t)} \partial_t \right)$  n'est autre que  $\Delta_{\Gamma^s}$ , le Laplacien sur la courbe de niveau  $\Gamma^s = \{x + s\vec{n}(x) \mid x \in \Gamma\}$ .

### 1.3.2 Transformation en domaine fixe

À l'aide d'une dilatation dans la couche mince, on peut transformer le domaine  $\Omega^\varepsilon$  en un domaine fixe, le petit paramètre  $\varepsilon$  apparaissant alors dans les équations, ce qui est plus simple à traiter.

On introduit la variable dilatée  $S = \frac{s}{\varepsilon}$ , si bien que  $(t, S)$  parcourt le domaine  $(0, \ell_\Gamma) \times (0, 1)$  ( $\ell_\Gamma$  est la longueur de la courbe  $\Gamma$ ).

**Lemme 1.7** *Dans les coordonnées  $(t, S = \frac{s}{\varepsilon})$ , le Laplacien prend la forme*

$$(1.11) \quad \Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \partial_S^2 - \sum_{\ell=1}^N \varepsilon^\ell A_\ell + \varepsilon^{N+1} T_\varepsilon^N \right),$$

les opérateurs  $(A_\ell)$  comportent au plus une dérivée selon  $S$  (en particulier  $A_1 = -c(t)\partial_S$ ) et  $T_\varepsilon^N$  est un opérateur uniformément borné en  $\varepsilon$ .

DÉMONSTRATION. La vérification est immédiate à l'aide de la formule (1.10). ■

Il est possible de donner un procédé récurrent de construction des opérateurs  $A_\ell$  mais on utilisera seulement la forme explicite de  $A_1$ .

On note  $U_{\text{ext}}^\varepsilon$  la fonction définie sur  $\Omega_{\text{ext}}$  par  $u_{\text{ext}}^\varepsilon(t, s) = U_{\text{ext}}^\varepsilon(t, S)$ . Dans les nouvelles coordonnées (semi-dilatées), le problème de transmission (1.1) devient :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \partial_S^2 - \sum_{\ell=1}^N \varepsilon^\ell A_\ell + \varepsilon^{N+1} T_\varepsilon^N \right) U_{\text{ext}}^\varepsilon = F_{\text{ext}} & \text{dans } (0, \ell_\Gamma) \times (0, 1), \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon(\gamma(t)) = \frac{1}{\varepsilon} \partial_S U_{\text{ext}}^\varepsilon(t, 0) + g(\gamma(t)) & \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma), \\ u_{\text{int}}^\varepsilon(\gamma(t)) = U_{\text{ext}}^\varepsilon(t, 0) & \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma), \\ U_{\text{ext}}^\varepsilon(t, 1) = 0 & \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma), \end{array} \right.$$

problème posé dans un domaine fixe. Il reste à préciser la dépendance de  $F_{\text{ext}}$  en  $\varepsilon$  : si  $f_{\text{ext}}$  est suffisamment régulière, on peut écrire son développement de Taylor au voisinage de  $\Gamma$  : on obtient alors l'expression suivante pour  $F_{\text{ext}}$ .

$$F_{\text{ext}}(t, S) = \sum_{\ell=0}^N \varepsilon^\ell F_{\text{ext}}^\ell(t) S^\ell + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}), \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

### 1.3.3 Les problèmes élémentaires

La structure des équations (1.12) laisse apparaître des puissances entières de  $\varepsilon$ , ce qui conduit naturellement à effectuer l'ansatz suivant :

$$u_{\text{int}}^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_{\text{int}}^n \quad \text{et} \quad U_{\text{ext}}^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_{\text{ext}}^n,$$

où les fonctions  $u_{\text{int}}^n$  et  $U_{\text{ext}}^n$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$ .

Cette écriture est purement formelle, on ne cherche pas ici à donner un sens à la convergence éventuelle des séries. En insérant ces expressions dans le problème (1.12), et en identifiant les termes de même puissance de  $\varepsilon$ , on obtient deux suites de problèmes découplés :

$$(1.13) \quad \begin{cases} \partial_S^2 U_{\text{ext}}^n = F_{\text{ext}}^{n-2}(t) S^{n-2} + \sum_{\substack{\ell+p=n \\ \ell, p \geq 1}} A_\ell U_{\text{ext}}^p & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}, \\ \partial_S U_{\text{ext}}^n = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^{n-1} - g \delta_1^n & \text{sur } \Gamma, \\ U_{\text{ext}}^n = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}, \end{cases}$$

$$(1.14) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^n = f_{\text{int}} \delta_0^n & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^n = U_{\text{ext}}^n & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

( $\delta$  désigne le symbole de Kronecker et on pose par convention  $F_{\text{ext}}^{-1} = F_{\text{ext}}^{-2} = u_{\text{int}}^{-1} = 0$ ).

**Remarque.** Afin d'alléger les notations, on a commis l'abus de notation qui consiste à confondre un point  $x$  de la courbe  $\Gamma$  avec son abscisse curviligne. C'est pourquoi  $\Gamma$  apparaît dans les équations précédentes au lieu de l'intervalle  $(0, \ell_\Gamma)$ .

Si on suppose connus  $(u_{\text{int}}^k)$  et  $(U_{\text{ext}}^k)$  pour  $k < n$ , alors les seconds membres des deux problèmes précédents sont bien définis. Le problème (1.13) est unidimensionnel et admet une solution unique. Quant à (1.14), c'est un problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace dans  $\Omega_{\text{int}}$  pour lequel on a aussi existence et unicité (pour des données suffisamment régulières).

### 1.3.4 Calcul des premiers termes

Dans ce paragraphe, on calcule explicitement les 3 premiers termes du développement asymptotique pour présenter le procédé algorithmique de construction.

*Termes de rang 0*

En vertu des équations (1.13) et (1.14), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_S^2 U_{\text{ext}}^0 = 0 \text{ pour } 0 < S < 1, \\ \partial_S U_{\text{ext}}^0 = 0 \text{ pour } S = 0, \\ U_{\text{ext}}^0 = 0 \text{ pour } S = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta u_{\text{int}}^0 = f_{\text{int}} \text{ dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^0 = U_{\text{ext}}^0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

si bien que  $U_{\text{ext}}^0 = 0$  et  $u_{\text{int}}^0$  est solution du problème de Dirichlet homogène dans  $\Omega_{\text{int}}$  avec  $f_{\text{int}}$  comme terme source.

*Termes de rang 1*

Pour  $n = 1$ , les problèmes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_S^2 U_{\text{ext}}^1 = A_1 U_{\text{ext}}^0 = 0 \text{ pour } 0 < S < 1, \\ \partial_S U_{\text{ext}}^1 = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^0 - g \text{ pour } S = 0, \\ U_{\text{ext}}^1 = 0 \text{ pour } S = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta u_{\text{int}}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^1 = U_{\text{ext}}^1 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On a donc  $U_{\text{ext}}^1 = (S - 1)[\alpha \partial_n u_{\text{int}}^0|_{\Gamma} - g]$  et  $u_{\text{int}}^1$  résout une équation de Laplace avec la donnée de Dirichlet  $U_{\text{ext}}^1$ .

*Termes de rang 2*

à l'ordre 2, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_S^2 U_{\text{ext}}^2 = A_2 U_{\text{ext}}^0 + A_1 U_{\text{ext}}^1 + F_{\text{ext}}^0 \text{ pour } 0 < S < 1, \\ \partial_S U_{\text{ext}}^2 = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^1 \text{ pour } S = 0, \\ U_{\text{ext}}^2 = 0 \text{ pour } S = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \Delta u_{\text{int}}^2 = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^2 = U_{\text{ext}}^2 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

En utilisant la forme explicite de  $U_{\text{ext}}^1$  et la définition  $A_1 = -c(t)\partial_S$ , on obtient

$$A_2 U_{\text{ext}}^0 + A_1 U_{\text{ext}}^1 + F_{\text{ext}}^0 = -c(t)[\alpha \partial_n u_{\text{int}}^0|_{\Gamma} - g] + F_{\text{ext}}^0,$$

d'où l'expression suivante pour  $U_{\text{ext}}^2$  :

$$(1.15) \quad U_{\text{ext}}^2 = -c(t)[\alpha \partial_n u_{\text{int}}^0|_{\Gamma} - g] \frac{S^2 - 1}{2} + \int_1^S \int_0^\sigma F_{\text{ext}}^0(t, u) \, du \, d\sigma + \alpha(S - 1) \partial_n u_{\text{int}}^1|_{\Gamma}$$

**Remarque.** Les calculs précédents sont possibles si les données sont suffisamment régulières. En effet la donnée de Dirichlet dans le problème qui définit  $u_{\text{int}}^1$  est  $U_{\text{ext}}^1|_{\Gamma}$ ,

c'est-à-dire  $g - \alpha \partial_n u_{\text{int}}^0|_{\Gamma}$ . Elle doit appartenir à l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  pour qu'on puisse définir correctement  $u_{\text{int}}^1$ , ce qui requiert les conditions

$$u_{\text{int}}^0 \in H^2(\Omega_{\text{int}}) \quad \text{et} \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Puisqu'on a supposé le bord  $\Gamma$  régulier, la régularité de  $f_{\text{int}}$  permet d'assurer celle de  $u_{\text{int}}^0$ . Ici la condition  $f_{\text{int}} \in L^2(\Omega_{\text{int}})$  suffit, mais si on veut poursuivre la construction du développement asymptotique, on a besoin d'une plus grande régularité sur les données. On a coutume de dire que, dans ce cas, le développement asymptotique "consomme" des dérivées.

### 1.3.5 Le développement complet

Le procédé décrit dans le paragraphe précédent peut être poursuivi à tout ordre, pourvu que les données soient suffisamment régulières. On peut aussi estimer l'erreur commise en tronquant la série à un nombre fini de termes.

**Théorème 1.8** *Si  $f_{\text{int}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_{\text{int}}})$ ,  $f_{\text{ext}}$  est la restriction à  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  d'une fonction de  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon_0}})$ ,  $g \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$  et  $\Gamma$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut construire la suite  $(u_{\text{int}}^n, U_{\text{ext}}^n)$  – indépendante de  $\varepsilon$  – définie par les équations (1.13) et (1.14). La solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.1) admet alors le développement asymptotique suivant*

$$u^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u^n \quad \text{où} \quad u^n|_{\Omega_{\text{int}}} = u_{\text{int}}^n \quad \text{et} \quad u^n|_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon}(t, s) = U_{\text{ext}}^n(t, \varepsilon^{-1}s).$$

En définissant le reste d'ordre  $N$  comme la différence entre la solution exacte et la série tronquée :

$$r_\varepsilon^N = u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u^n,$$

on a l'estimation suivante, où  $C_N$  ne dépend pas de  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,

$$\|r_{\varepsilon, \text{int}}^N\|_{1, \Omega_{\text{int}}} + \sqrt{\varepsilon} \|r_{\varepsilon, \text{ext}}^N\|_{1, \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} \leq C_N \varepsilon^{N+1}.$$

**Remarque.** Ce résultat ne donne aucune information sur la convergence de la série  $\sum u_n$ . On s'intéresse ici à la convergence de  $r_\varepsilon^N$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et pas quand  $N$  tend vers l'infini (c'est ce que l'on nomme *convergence au sens des développements asymptotiques*).

**DÉMONSTRATION.** Les hypothèses de régularité permettent d'assurer que les problèmes (1.13) et (1.14) sont bien posés dans  $H^1$ . Examinons maintenant le reste  $r_\varepsilon^N$  :



par construction, les premiers termes de son Laplacien à l'extérieur s'annulent :

$$\begin{aligned}
\Delta r_{\varepsilon, \text{ext}}^N &= \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left[ \partial_S^2 U_{\text{ext}}^n - \sum_{\ell=1}^N \varepsilon^\ell A_\ell U_{\text{ext}}^n + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}) \right] \\
&= f_{\text{ext}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^{n-2} F_{\text{ext}}^{n-2}(t) S^{n-2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\ell=1}^N \left[ \sum_{n=\ell}^N \varepsilon^n A_\ell U_{\text{ext}}^{n-\ell} - \sum_{n=\ell}^{N+\ell} \varepsilon^n A_\ell U_{\text{ext}}^{n-\ell} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-1}) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\ell=1}^N \left[ \sum_{n=N+1}^{N+\ell} \varepsilon^n A_\ell U_{\text{ext}}^{n-\ell} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-1}) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{N-1}).
\end{aligned}$$

De même pour les dérivées normales :

$$\alpha \partial_n r_{\varepsilon, \text{int}}^N - \partial_n r_{\varepsilon, \text{ext}}^N = g - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left[ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^n - \frac{1}{\varepsilon} \partial_S U_{\text{ext}}^n \right] = \alpha \varepsilon^N \partial_n u_{\text{int}}^N.$$

Ainsi  $r_\varepsilon^N$  vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} \alpha \Delta r_{\varepsilon, \text{int}}^N = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta r_{\varepsilon, \text{ext}}^N = \mathcal{O}(\varepsilon^{N-1}) & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \alpha \partial_n r_{\varepsilon, \text{int}}^N = \partial_n r_{\varepsilon, \text{ext}}^N + \mathcal{O}(\varepsilon^N) & \text{sur } \Gamma, \\ r_{\varepsilon, \text{int}}^N = r_{\varepsilon, \text{ext}}^N & \text{sur } \Gamma, \\ r_{\varepsilon, \text{ext}}^N = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon. \end{cases}$$

L'estimation a priori du théorème 1.1 permet de déduire que  $\|r_\varepsilon^N\|_{1, \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{N-1})$ . Afin d'obtenir la majoration annoncée, il suffit d'écrire :

$$r_\varepsilon^N = r_\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} u^{N+1} + \varepsilon^{N+2} u^{N+2}.$$

L'estimation à l'intérieur s'en déduit directement :

$$\|r_{\varepsilon, \text{int}}^N\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq C_N \varepsilon^{N+1}.$$

Pour la partie extérieure, il faut utiliser les variables semi-dilatées : par analogie avec  $U_{\text{ext}}^\varepsilon$ , on note  $R_{\varepsilon, \text{ext}}^N$  le reste d'ordre  $N$  dans les variables  $(t, S)$ . En utilisant le fait que  $U_{\text{ext}}^N$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , on obtient

$$\|r_{\varepsilon, \text{ext}}^N\|_{1, \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|R_{\varepsilon, \text{ext}}^N\|_{1, \Omega_{\text{ext}}} \leq C_N \varepsilon^{N+\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare$$

**Remarque.** On peut préciser la structure des termes du développement asymptotique : dans la partie extérieure,  $U_{\text{ext}}^n$  a une structure tensorielle en les variables  $(t, S)$  :

$$U_{\text{ext}}^n(t, S) = \sum_{\ell \leq n} \phi_\ell^n(t) S^\ell,$$

et donc

$$u_{\text{ext}}^n(t, s) = \sum_{\ell \leq n} \varepsilon^{-\ell} \phi_\ell^n(t) s^\ell,$$

cela se vérifie simplement par récurrence sur les équations (1.13). En outre, dans l'expression de  $\partial_S^2 U_{\text{ext}}^n$ , la contribution de plus haut degré en  $S$  provient du terme  $A_1 U_{\text{ext}}^{n-1} = -c(t) \partial_S U_{\text{ext}}^{n-1}$ . Cela prouve que le terme  $\phi_n^n$  est génériquement non nul.

Cette remarque permet d'en déduire que  $\partial^\beta(\varepsilon^n u_{\text{ext}}^n)$  est borné indépendamment de  $\varepsilon$ , pour tout  $\beta \in \mathbb{N}^2$ . En effet, si  $\beta = (\beta_t, \beta_s)$ ,

$$\partial^\beta(\varepsilon^n u_{\text{ext}}^n) = \sum_{\ell=\beta_s}^n \frac{\ell!}{(\ell-\beta_s)!} \varepsilon^{n-\ell} [\partial^{\beta_t} \phi_\ell^n(t)] s^{\ell-\beta_s}.$$

Il en est donc de même du développement asymptotique à tout ordre :  $\sum \varepsilon^n u_{\text{ext}}^n$  est borné indépendamment de  $\varepsilon$ , ainsi que toutes ses dérivées. En outre il n'est pas possible d'obtenir mieux, car  $\partial^\beta(\varepsilon^n u_{\text{ext}}^n)$  est un  $\mathcal{O}(1)$  pour  $\beta_s = n$ .

La solution du problème de transmission  $u_{\text{ext}}^\varepsilon$  possède aussi cette propriété, c'est une conséquence immédiate de l'estimation (1.6). Le fait que le développement asymptotique réalise cette estimation montre son optimalité.

## 1.4 Conditions aux limites approchées

Dans ce paragraphe, on retrouve les conditions aux limites généralisées données dans [16] pour l'opérateur de Laplace, la méthode utilisée diffère car elle utilise la construction du développement asymptotique. En outre les estimations du théorème 1.8 permettent de prouver des estimations optimales, plus précises que celles montrées dans [16].

### 1.4.1 Condition d'ordre 0

Si on tronque la série définissant le développement asymptotique en ne conservant qu'un seul terme, on obtient l'approximation

$$u_{\text{int}}^\varepsilon \simeq u^{[0]} := u_{\text{int}}^0,$$

qui résout le problème

$$\begin{cases} \alpha \Delta u^{[0]} = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u^{[0]} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Cela revient à enlever la couche mince et à imposer la condition de Dirichlet  $u = 0$  sur  $\Gamma$  (c'est le problème limite, correspondant au cas  $\varepsilon = 0$ ). Le théorème 1.8 permet d'estimer l'erreur commise.

**Proposition 1.9** *On note  $v_{[0]}^\varepsilon$  la solution du problème*

$$(1.16) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v_{[0]}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v_{[0]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

*Alors on a l'estimation suivante entre la partie intérieure  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  de la solution du problème de transmission (1.1) et  $v_{[0]}^\varepsilon$  : il existe  $C$ , indépendante de  $\varepsilon$ , telle que*

$$\left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq C \varepsilon.$$

**Remarque.** Le problème (1.16) ne dépend pas de  $\varepsilon$  ; on a cependant conservé  $\varepsilon$  dans la notation  $v_{[0]}^\varepsilon$  par cohérence avec la suite.

### 1.4.2 Condition d'ordre 1

Conservons maintenant deux termes dans le développement :

$$u_{\text{int}}^\varepsilon \simeq u^{[1]} := u_{\text{int}}^0 + \varepsilon u_{\text{int}}^1.$$

Alors  $u^{[1]}$  vérifie

$$\begin{cases} \alpha \Delta u^{[1]} = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u^{[1]} = -\varepsilon \alpha \partial_n u^{[0]} + \varepsilon g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La condition sur  $\Gamma$  implique  $u^{[1]} + \alpha \varepsilon \partial_n u^{[1]} - \varepsilon g = \alpha \varepsilon^2 \partial_n u_{\text{int}}^1$ . Il s'agit d'une condition aux limites mixte de type Robin, qui nous conduit à considérer le problème

$$(1.17) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v_{[1]}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v_{[1]}^\varepsilon + \alpha \varepsilon \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = \varepsilon g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

à la différence du paragraphe précédent, on n'a pas ici  $u^{[1]} = v_{[1]}^\varepsilon$ . En effet, les solutions  $u^{[1]}$  et  $v_{[1]}^\varepsilon$  résolvent un même problème avec des seconds membres qui diffèrent d'une

quantité  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Une estimation a priori sur ce problème nous permet d'estimer l'erreur commise :

**Lemme 1.10** *Soit  $h \in L^2(\Gamma)$ , alors le problème*

$$\begin{cases} \alpha \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v + \alpha \varepsilon \partial_n v = h & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

*possède une unique solution qui vérifie l'estimation a priori suivante*

$$\|v\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \|h\|_{0,\Gamma}.$$

DÉMONSTRATION. La formulation variationnelle du problème s'écrit

$$\forall w \in H^1(\Omega_{\text{int}}), \quad a(v, w) = l(w),$$

avec

$$a(v, w) = \alpha \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} v w \, d\sigma \quad \text{et} \quad l(w) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} h w \, d\sigma.$$

La proposition est une application du théorème de Lax-Milgram, la constante de coercivité étant d'ordre 1. ■

**Proposition 1.11** *On a l'estimation suivante entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (1.1) et la solution de (1.17) :*

$$\left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon \right\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition,  $\phi = u^{[1]} - v_{[1]}^\varepsilon$  résout le problème

$$\begin{cases} \alpha \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \phi + \alpha \varepsilon \partial_n \phi = \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

L'estimation a priori donnée dans le lemme 1.10 permet d'en déduire :

$$\|\phi\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

Comme, d'autre part, on a la majoration du reste du développement asymptotique (voir théorème 1.8)

$$\left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - u^{[1]} \right\|_{1,\Omega_{\text{int}}} = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

on en déduit le résultat. ■

**Remarque.** La méthode utilisée pour obtenir l'estimation de la proposition précédente est classique en analyse asymptotique. Elle ne conduit cependant pas à un résultat optimal, comme le montre le théorème qui suit.

**Théorème 1.12** *On a l'estimation suivante entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (1.1) et la solution de (1.17) :*

$$\left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq C \varepsilon^2.$$

DÉMONSTRATION. On peut effectuer un développement asymptotique pour le problème avec condition d'impédance d'ordre 1 (1.17) : l'ansatz  $v_{[1]}^\varepsilon = \sum \varepsilon^n v^n$  fournit la relation de récurrence :

$$\begin{cases} \alpha \Delta v^n = f_{\text{int}} \delta_0^n & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v^n = -\alpha \partial_n v^{n-1} + g \delta_1^n & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Un simple calcul montre que les premiers termes  $v^0$  et  $v^1$  coïncident avec  $u_{\text{int}}^0$  et  $u_{\text{int}}^1$ , premiers termes de la partie intérieure du développement asymptotique de  $u^\varepsilon$ . Il est facile de montrer l'estimation du reste d'ordre 1 pour le développement de  $v_{[1]}^\varepsilon$  et donc

$$\left\| v_{[1]}^\varepsilon - v^0 - \varepsilon v^1 \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} = \left\| v_{[1]}^\varepsilon - u_{[1]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq C \varepsilon^2,$$

d'où le résultat. ■

**Remarque.** L'estimation donnée dans le théorème précédent est optimale, car les termes  $u^2$  et  $u_{\text{int}}^2$  ne coïncident pas génériquement. L'obtention de majorations optimales est un des points forts de l'utilisation des développements asymptotiques.

### 1.4.3 Condition d'ordre 2

On effectue la même étude que précédemment, en conservant les trois premiers termes du développement asymptotique. On suppose ici que  $f_{\text{ext}} = g = 0$ . On vérifie aisément, à l'aide de la formule (1.15), que  $u^{[2]} = u_{\text{int}}^0 + \varepsilon u_{\text{int}}^1 + \varepsilon^2 u_{\text{int}}^2$  est solution de

$$\begin{cases} \alpha \Delta u^{[2]} & = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} c(x)\right) u^{[2]} + \alpha \varepsilon \partial_n u^{[2]} & = \mathcal{O}(\varepsilon^3) & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où  $c(x)$  désigne la courbure de  $\Gamma$  au point  $x \in \Gamma$ . Le problème avec condition d'impédance d'ordre 2 s'écrit alors

$$\begin{cases} \alpha \Delta v_{[2]}^\varepsilon & = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} c(x)\right) v_{[2]}^\varepsilon + \alpha \varepsilon \partial_n v_{[2]}^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

**Théorème 1.13** *On a l'estimation suivante entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (1.1) et la solution de (1.17) :*

$$\left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq C \varepsilon^3.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est la même que pour le théorème 1.12 : on effectue le développement asymptotique de  $v_{[2]}^\varepsilon$ , dont les trois premiers termes coïncident avec celui de  $u_{\text{int}}^\varepsilon$ . Les estimations des restes permettent de conclure. ■

**Remarque.** Dans [16] les estimations suivantes sont prouvées :

$$\left\| u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_{\text{int}}} \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k = 0, \\ \varepsilon^{\frac{3}{2}} & \text{si } k = 1, \\ \varepsilon^{\frac{5}{2}} & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

Celles prouvées dans ce paragraphe sont plus fines ; les techniques de développement asymptotique ont permis de montrer leur optimalité.

## 1.5 Résultats numériques

Les calculs présentés dans ce paragraphe ont été effectués à l'aide de la bibliothèque éléments finis MÉLINA (voir [23] et annexe).

Le but des calculs effectués est d'illustrer les résultats du paragraphe précédent. Précisément, on désire mettre en évidence la vitesse de convergence de la solution  $v_{[k]}^\varepsilon$  du problème avec condition d'impédance d'ordre  $k$  vers la partie intérieure  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  de celle du problème de transmission en fonction de  $k = 0, 1, 2$ .

### 1.5.1 Les problèmes continus

On cherche à approcher, pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ , la solution  $u^\varepsilon$  du problème de transmission (1.1). On a pris comme données  $g = 0$ ,  $f_{\text{ext}} = 0$  et  $f_{\text{int}} = -x_1^2$  (des tests ont été effectués avec d'autres types de données, conduisant à des résultats comparables à ceux présentés ici). On considère le problème (1.1), qu'on rappelle ici.

$$(1.18) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon, \end{cases}$$

posé dans la couronne  $\Omega^\varepsilon$  :

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < (2 + \varepsilon)^2 \text{ et } x_1, x_2 > 0 \right\},$$

le domaine intérieur étant défini par

$$\Omega_{\text{int}} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4 \text{ et } x_1, x_2 > 0 \right\}.$$

De même, on désire obtenir une approximation (pour les mêmes valeurs de  $\varepsilon$ ) des trois problèmes suivants :

$$(1.19) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v_{[0]}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v_{[0]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

$$(1.20) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v_{[1]}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v_{[1]}^\varepsilon + \alpha \varepsilon \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

$$(1.21) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v_{[2]}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ (1 + \frac{\varepsilon}{2} c(x)) v_{[2]}^\varepsilon - \alpha \varepsilon \partial_n v_{[2]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Précisément on calcule, pour  $\varepsilon = 2^{-j}$  ( $j = 1, \dots, 10$ ) :

- l'approximation par éléments finis de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de transmission (1.18) ;
- l'approximation par éléments finis des solutions  $v_{[k]}^\varepsilon$  ( $k = 0, 1, 2$ ) de chacun des problèmes d'impédance (1.19), (1.20) et (1.21) ;
- des estimations des normes  $L^2$  et  $H^1$  de la différence  $u^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon$  pour  $k = 0, 1, 2$ .

### 1.5.2 Approximation à l'aide d'éléments droits de type $\mathbb{Q}_1$

L'idée la plus simple consiste à mailler le domaine  $\Omega^\varepsilon$  en quadrilatères, comme le montre la figure 1.1 ci-contre.

Chaque élément  $K$  du domaine de calcul  $\Omega_h^\varepsilon$  (qui diffère de  $\Omega^\varepsilon$  à cause de la courbure) est l'image du carré unité  $\hat{K}$  par une application affine  $F_K$ .

L'espace d'approximation est alors défini par

$$\left\{ v \in \mathcal{C}^0(\Omega_h^\varepsilon) \mid \forall K, v \circ F_K \in \mathbb{Q}_p(\hat{K}) \right\},$$

$p$  est appelé *degré d'interpolation fonctionnelle*.

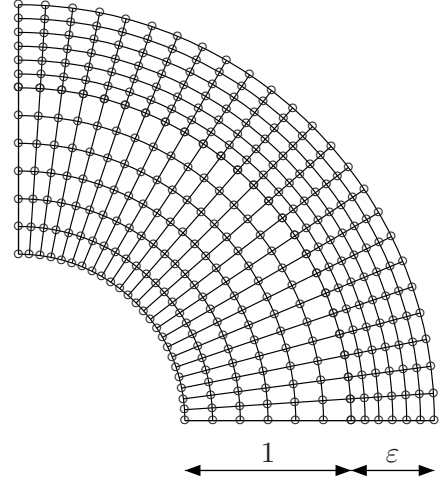


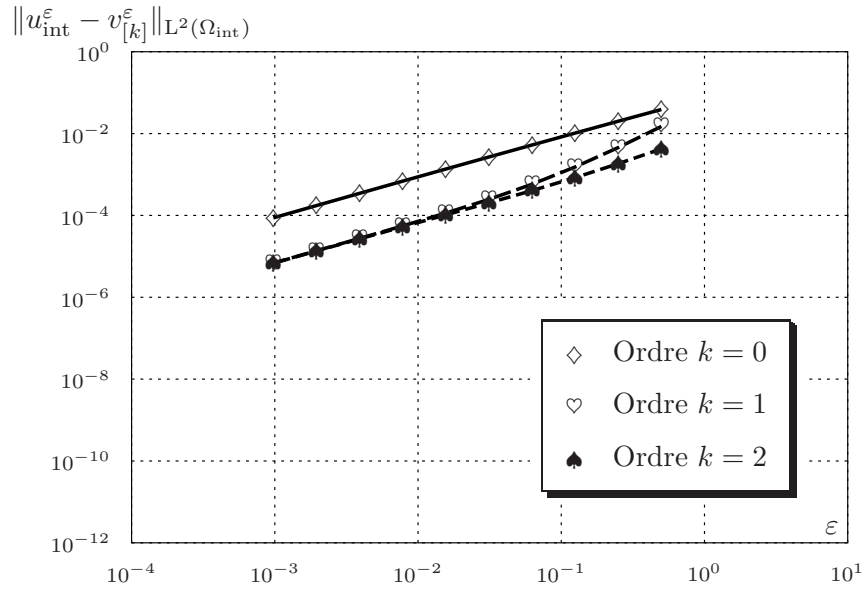
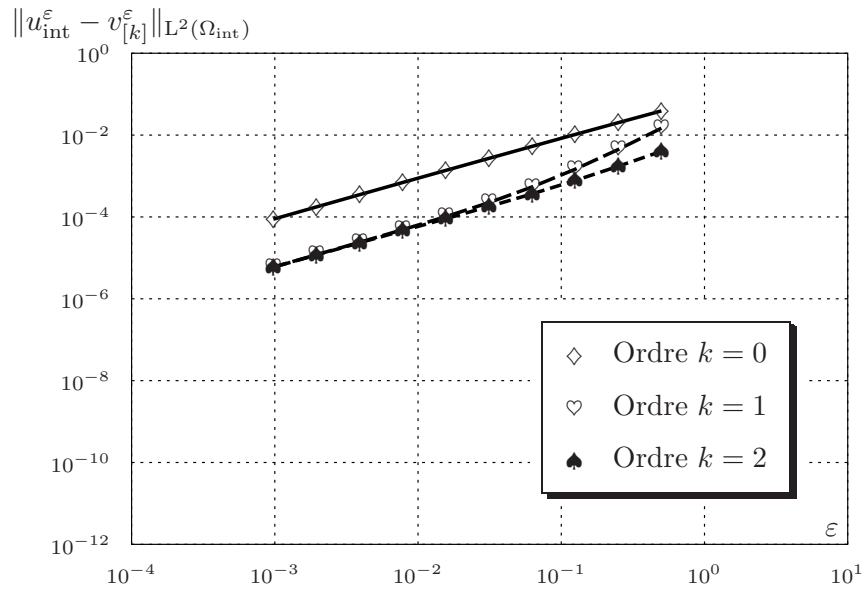
FIG. 1.1 – Maillage  $\mathbb{Q}_1$  (299 nœuds).

La méthode la plus simple consiste à choisir  $p = 1$  : l'interpolation est isoparamétrique de degré 1. La figure 1.2 représente la norme de la différence  $u^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  en coordonnées logarithmiques. Au vu des résultats théoriques, on s'attend à obtenir trois droites de pentes respectives 1, 2 et 3. Or les droites de la figure 1.2 semblent toutes trois avoir des pentes voisines de 1.

La courbe correspondant à  $k = 1$  (repérée avec le symbole  $\heartsuit$ ) possède une pente plus importante pour les valeurs faibles de  $\varepsilon$ , mais celle-ci se rapproche de 1 quand  $\varepsilon$  diminue. Cette remarque conduit à mettre en doute l'approximation utilisée : il semble que l'erreur de la méthode numérique soit plus importante que la quantité qui nous intéresse.

Pour remédier à ce problème, on a effectué les calculs sur le même maillage droit que précédemment, mais en utilisant un degré d'approximation fonctionnelle égal à 6. L'interpolation n'est plus isoparamétrique. Les résultats sont consignés sur le graphe de la figure 1.3.



FIG. 1.2 – Résultats avec un maillage droit et une interpolation  $\mathbb{Q}_1$ .FIG. 1.3 – Résultats avec un maillage droit et une interpolation  $\mathbb{Q}_6$ .

On observe que les résultats sont quasi-identiques à ceux obtenus avec une interpolation de degré 1, ce qui montre que l'interpolation fonctionnelle n'est pas la cause de l'erreur.

En effet, le domaine de calcul  $\Omega_h^\varepsilon$  approche relativement mal le domaine réel  $\Omega^\varepsilon$ , si bien que l'erreur due à cette approximation est trop importante et ne permet donc pas de mettre en évidence le phénomène qui nous intéresse, qui nécessite une précision bien supérieure, comme on va le voir plus bas.

Il s'agit ici d'un problème de *non-consistance géométrique* : même si on calculait la solution exacte du problème continu posé sur  $\Omega_h^\varepsilon$ , les résultats ne seraient pas plus satisfaisants.

On est donc amené à remettre en cause le maillage du domaine : dans le paragraphe qui suit, on utilise un degré d'interpolation géométrique plus important qui permet, avec un plus petit nombre d'éléments, d'approcher de manière beaucoup plus précise le bord du domaine.

### 1.5.3 Approximation à l'aide d'éléments courbes de degré 6

Le paragraphe précédent nous a permis de voir que l'approximation géométrique est cruciale. On choisit donc d'utiliser une approximation plus précise du domaine  $\Omega^\varepsilon$  à l'aide de quadrangles courbes de degré 6 (i.e.  $F_K \in \mathbb{Q}_6$ ).

La figure 1.4 ci-contre montre le maillage en 8 éléments qu'on a utilisé.

L'interpolation est isoparamétrique : le nombre de degrés de liberté coïncide avec le nombre de nœuds du maillage : 299. La matrice à inverser est donc beaucoup plus petite que dans le paragraphe précédent, le coût de calcul est donc bien moindre.

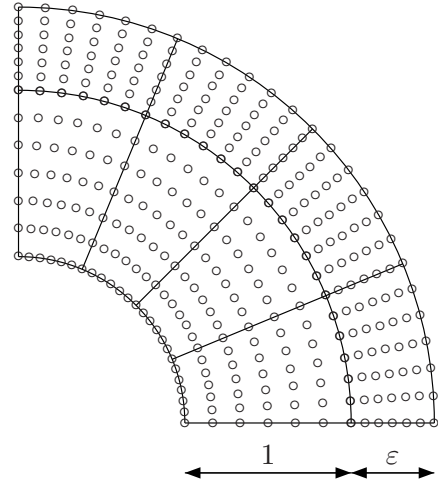


FIG. 1.4 – Maillage  $\mathbb{Q}_6$  (299 nœuds).

Le fait que les matrices soient plus pleines quand on utilise des éléments  $\mathbb{Q}_6$  que dans le cas isoparamétrique  $\mathbb{Q}_1$  pourrait laisser penser qu'un grand nombre d'éléments  $\mathbb{Q}_1$  conduirait à une bonne approximation. En fait il n'en est rien car l'approximation géométrique est bien meilleure avec quelques éléments de haut degré qu'avec beaucoup d'éléments droits.

Le graphe de la figure 1.5 représente la norme  $L^2$  de  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  en coordonnées logarithmiques. La norme de la différence  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon$ , qui était limitée aux

environs de  $10^{-5}$  sur les figures 1.2 et 1.3, est maintenant de l'ordre de  $10^{-10}$  pour les valeurs les plus faibles de  $\varepsilon$ .

L'erreur d'approximation provenait donc bien de la différence entre le domaine  $\Omega^\varepsilon$  et le domaine de calcul.

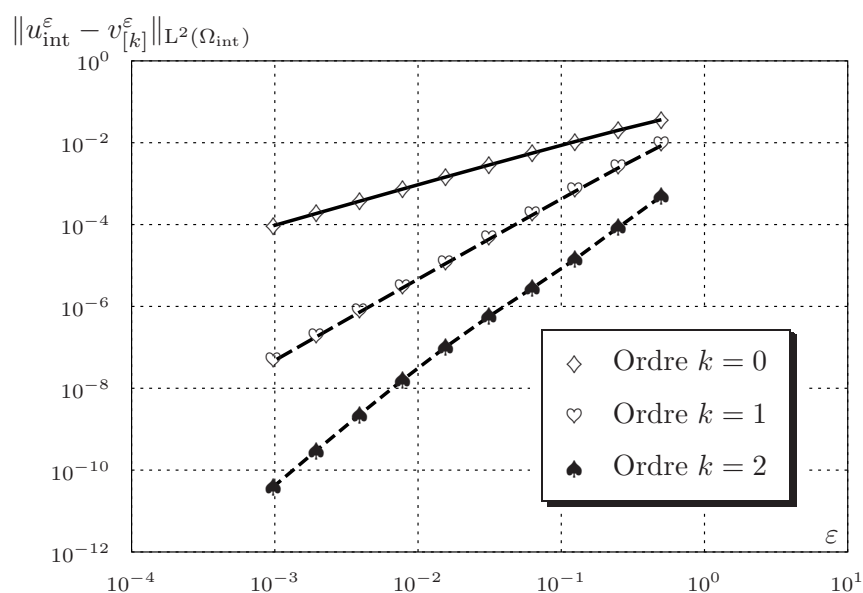


FIG. 1.5 – *Comparaison des problèmes d'impédance avec le problème initial.*

Les pentes entre deux points successifs de chaque courbe sont reportées dans le tableau ci-dessous : (pour  $\varepsilon$  croissant)

◇	0.996	0.993	0.988	0.980	0.970	0.960	0.945	0.915	0.859
♡	1.994	1.989	1.981	1.972	1.965	1.957	1.939	1.894	1.815
♠	2.951	2.905	2.820	2.676	2.472	2.292	2.359	2.577	2.536

On retrouve donc bien les ordres de convergence 1, 2, 3 prouvés théoriquement. Notons que, pour les petites valeurs de  $\varepsilon$ , l'erreur  $\|u^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon\|$  est d'ordre  $10^{-10}$ , ce qui montre qu'une grande précision est requise dans les calculs (ceux-ci doivent être effectués en double précision).

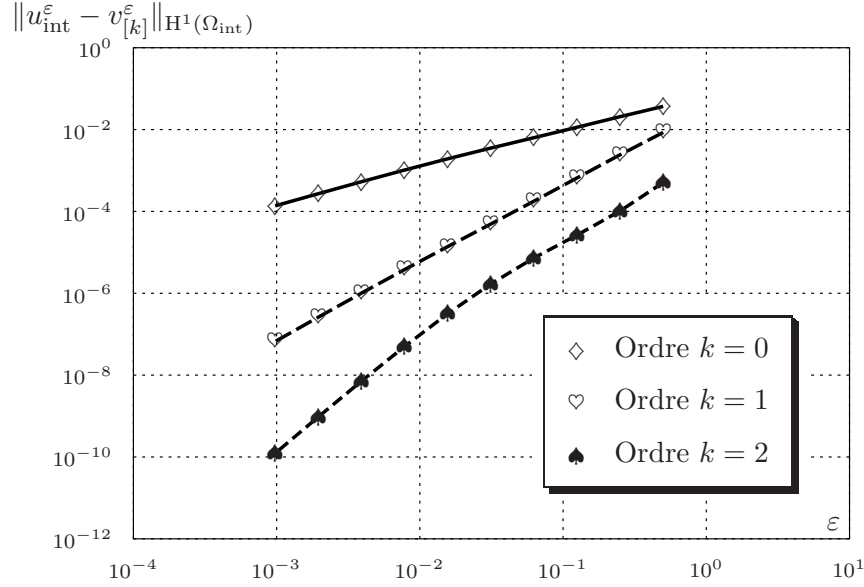


FIG. 1.6 – Comparaison des problèmes d'impédance avec le problème initial.

Ici encore, on a calculé les pentes successives :

◇	0.985	0.972	0.948	0.912	0.870	0.843	0.849	0.860	0.835
♡	1.973	1.950	1.912	1.864	1.833	1.853	1.891	1.881	1.813
♠	2.950	2.902	2.813	2.658	2.419	2.111	1.855	1.962	2.307

Les résultats sont similaires en norme  $H^1$  : on obtient encore les pentes 1, 2, 3, ce qui illustre numériquement leur optimalité.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a construit un développement asymptotique de la solution du problème de transmission (1.1), en utilisant une dilatation de la couche mince. On a montré comment la connaissance de ce développement permettait l'obtention des conditions d'impédance pour le problème de transmission avec couche mince (1.1).

En outre cette méthode permet de bénéficier du formalisme des développements asymptotiques, en particulier des estimations du reste. On a ainsi pu obtenir des estimations plus précises pour les problèmes avec impédance, que celles obtenues antérieurement, et de montrer leur optimalité.

Enfin les tests numériques réalisés illustrent l'optimalité des résultats théoriques ; on retrouve en effet les pentes prévues par la théorie dans les résultats des calculs. Les phénomènes qu'on désire mettre en évidence sont de nature asymptotique : il s'agit de comparer les vitesses de convergence vers 0 des quantités  $\|u_{\text{int}}^\varepsilon - v_{[k]}^\varepsilon\|$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Cela nécessite une grande précision de calcul car certaines de ces normes sont de l'ordre de  $10^{-10}$ . Une grande précision est donc requise dans les calculs, qui doivent être effectués en double précision. De plus la condition d'impédance d'ordre 2 n'ayant de raison d'être que dans le cas d'une frontière courbe, il est crucial d'utiliser une approximation de la géométrie par des éléments courbes d'ordre élevé. L'utilisation d'une approximation de type  $\mathbb{Q}_6$ -isoparamétrique est donc judicieuse.

## Chapitre 2

# Construction des profils dans un domaine sectoriel infini

Le chapitre précédent était consacré à l'étude d'un problème de transmission avec couche mince dans le cas d'une géométrie régulière. On désire s'intéresser maintenant au cas où le domaine présente un coin. On verra au chapitre 3 que les techniques utilisées jusqu'à présent ne permettent pas de construire le développement asymptotique de la solution dans cette situation.

Une étude précise au voisinage du coin est requise. Précisément, on effectue une homothétie de rapport  $\varepsilon^{-1}$ , qui a pour effet de transformer le domaine  $\Omega$  en un secteur plan infini quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0. Il s'agit donc d'étudier un problème de transmission dans ce domaine modèle, qui ne dépend plus de  $\varepsilon$ .

L'objet du chapitre 2 est la construction de solutions à ce problème modèle, qu'on nommera *profils*. Si  $\mathfrak{K}$  est un tel profil, c'est plus particulièrement son comportement en l'infini qui nous intéresse car il interviendra dans le développement asymptotique (voir chapitre 3) sous la forme

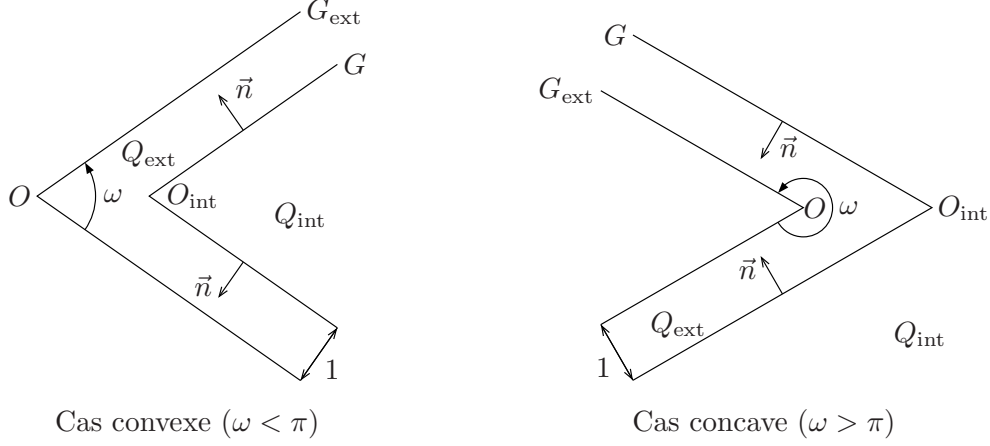
$$\mathfrak{K}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

La démarche qui suit est inspirée de [11], [9] et [24].

### 2.1 Introduction

Soit le secteur angulaire  $Q$  centré à l'origine, d'ouverture  $\omega$  ( $\omega \neq 0, \pi$ ), représenté sur la figure suivante.

$$Q = Q_{\text{int}} \cup G \cup Q_{\text{ext}}.$$



On se propose d'étudier le problème de transmission suivant : trouver  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\text{int}}, \mathbf{u}_{\text{ext}})$ , où  $\mathbf{u}_{\text{int}}$  est défini dans  $Q_{\text{int}}$  et  $\mathbf{u}_{\text{ext}}$  dans  $Q_{\text{ext}}$ , vérifiant :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathbf{u}_{\text{ext}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \alpha \Delta \mathbf{u}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{int}} & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_{\text{ext}} = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathbf{u}_{\text{int}} = \mathbf{u}_{\text{ext}} & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathbf{u}_{\text{int}} = \partial_n \mathbf{u}_{\text{ext}} + \mathbf{g} & \text{sur } G, \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{f}_{\text{int}}, \mathbf{f}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{g}$  sont des fonctions données et  $\alpha$  est un réel strictement positif;  $\partial_n$  désigne la dérivée normale selon  $\vec{n}$  (normale extérieure à  $Q_{\text{int}}$ , intérieure à  $Q_{\text{ext}}$ ).

Le but du chapitre est de construire une solution au problème (2.1) dont le comportement à l'infini est imposé et d'en obtenir un développement asymptotique à l'infini.

La technique employée s'appuie sur l'existence d'un espace variationnel dans lequel le problème (2.1) est bien posé pour des données convenables (voir §2.2). Elle consiste à construire les premiers termes d'un développement asymptotique, via une technique classique de résolution extérieure-intérieure, dans le but de se ramener au cas variationnel (§2.5). On obtient ainsi une solution au problème (2.1) dont le développement asymptotique à l'infini sera précisé à l'aide de la transformation de Mellin (cf. §2.7).

## 2.2 Solution variationnelle

De manière standard, on associe à (2.1) la formulation variationnelle suivante :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle F, \mathbf{v} \rangle,$$

la forme bilinéaire  $a$  est définie par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \int_{Q_{\text{int}}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{Q_{\text{ext}}} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx,$$

et la forme linéaire  $F$  par

$$\langle F, \mathbf{v} \rangle = - \int_Q \mathbf{f} \mathbf{v} \, dx + \int_G \mathbf{g} \mathbf{v} \, d\sigma.$$

On lui associe l'espace variationnel  $\mathfrak{V}$  (voir [25], par exemple) :

$$\mathfrak{V} = \left\{ \mathbf{v} \mid \nabla \mathbf{v} \in L^2(Q), \frac{\mathbf{v}}{1 + \bar{r}} \in L^2(Q) \text{ et } \mathbf{v}|_{G_{\text{ext}}} = 0 \right\},$$

muni de la norme naturelle

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{V}}^2 = \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,Q}^2 + \left\| \frac{\mathbf{v}}{1 + \bar{r}} \right\|_{0,Q}^2,$$

où  $\bar{r}$  désigne la distance au coin  $O$ . Le théorème suivant établit un résultat d'existence et d'unicité dans l'espace variationnel  $\mathfrak{V}$ .

**Théorème 2.1** *Si  $F \in \mathfrak{V}'$ , il existe une unique solution  $\mathbf{u} \in \mathfrak{V}$  au problème*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathfrak{V}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle F, \mathbf{v} \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Le résultat est une conséquence du théorème de Lax-Milgram, seule la coercivité de  $a$  n'est pas évidente. Soient  $(\bar{r}, \bar{\theta})$  les coordonnées polaires centrées en  $O$  ; on note encore  $\mathbf{v}$  la fonction dans les variables polaires. Soit  $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}$ ,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq \min(1, \alpha) \int_Q |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx \\ &\geq \frac{\min(1, \alpha)}{2} \left( \int_Q |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx + \int_Q \frac{1}{\bar{r}^2} |\partial_{\bar{\theta}} \mathbf{v}|^2 \, dx \right). \end{aligned}$$

Si on note  $\Theta = (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ , on peut écrire

$$\int_Q \frac{1}{\bar{r}^2} |\partial_{\bar{\theta}} \mathbf{v}|^2 \, dx = \int_0^{+\infty} \int_{\Theta} \frac{1}{\bar{r}^2} |\partial_{\bar{\theta}} \mathbf{v}|^2 \bar{r} \, d\bar{\theta} \, d\bar{r}.$$

D'autre part, comme  $\mathbf{v}(\bar{r}, -\frac{\omega}{2}) = \mathbf{v}(\bar{r}, \frac{\omega}{2}) = 0$ , on peut écrire une inégalité de Poincaré dans  $\Theta$ , avec une constante  $C$  indépendante de  $\bar{r}$  :

$$\int_{\Theta} |\partial_{\bar{\theta}} \mathbf{v}|^2 \, d\bar{\theta} \geq C \int_{\Theta} |\mathbf{v}|^2 \, d\bar{\theta}.$$



En multipliant cette dernière inégalité par  $\frac{1}{\bar{r}}$  et en intégrant par rapport à  $\bar{r}$ , on obtient

$$\int_Q \frac{1}{\bar{r}^2} |\partial_{\bar{\theta}} \mathbf{v}|^2 dx \geq C \int_0^{+\infty} \frac{1}{\bar{r}} \int_{\Theta} |\mathbf{v}|^2 d\bar{\theta} d\bar{r} \geq C \int_Q \left| \frac{\mathbf{v}}{\bar{r}} \right|^2 dx \geq C \int_Q \left| \frac{\mathbf{v}}{1+\bar{r}} \right|^2 dx,$$

d'où finalement

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C' \cdot \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{V}}^2,$$

avec  $C' = \frac{1}{2} \min(1, \alpha) \min(1, C)$ . ■

Le lemme suivant fournit une condition suffisante pour que  $F \in \mathfrak{V}'$ .

**Lemme 2.2** *Si  $(1 + \bar{r})\mathfrak{f} \in L^2(Q)$  et  $(1 + \bar{r})^{\frac{1}{2}}\mathfrak{g} \in L^2(G)$ , alors  $F \in \mathfrak{V}'$ . De plus il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|F\|_{\mathfrak{V}'} \leq C \left[ \|(1 + \bar{r})\mathfrak{f}\|_{0,Q} + \|(1 + \bar{r})^{\frac{1}{2}}\mathfrak{g}\|_{\frac{1}{2},G} \right].$$

DÉMONSTRATION. Il est immédiat que  $\mathbf{v} \mapsto \int_Q \mathfrak{f} \mathbf{v}$  est un élément de  $\mathfrak{V}'$ .

D'autre part,

$$(2.2) \quad \int_G \mathfrak{g} \mathbf{v} \leq \left[ \int_G \left[ (1 + \bar{r})^{\frac{1}{2}} \mathfrak{g} \right]^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_G \left[ (1 + \bar{r})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v} \right]^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit  $r$  la distance au coin  $O_{\text{int}}$ . Par inégalité de trace dans le domaine borné  $Q_{\text{int}} \cap [r < 1]$ , on obtient pour  $\mathfrak{h} \in H^1(Q_{\text{int}})$ ,

$$(2.3) \quad \int_{G \cap [r < 1]} \mathfrak{h}^2 d\sigma \leq C \left( \int_{Q_{\text{int}} \cap [r < 1]} \mathfrak{h}^2 dx + \int_{Q_{\text{int}} \cap [r < 1]} |\nabla \mathfrak{h}|^2 dx \right).$$

Par ailleurs, si on utilise une inégalité de trace dans la demi-bande  $\Theta \times (1, +\infty)$ , on peut écrire :

$$(2.4) \quad \int_{G \cap [r < 1]} \mathfrak{h}^2 d\sigma \leq C \left( \int_{Q_{\text{int}} \cap [r < 1]} \frac{\mathfrak{h}^2}{r} dx + \int_{Q_{\text{int}} \cap [r < 1]} \frac{|\nabla \mathfrak{h}|^2}{r} dx \right).$$

En utilisant (2.3) pour  $r < 1$  et (2.4) pour  $r > 1$ , on trouve (car  $r \sim 1 + \bar{r}$  en l'infini)

$$(2.5) \quad \int_G \mathfrak{h}^2 d\sigma \leq C \left( \int_{Q_{\text{int}}} \frac{\mathfrak{h}^2}{1 + \bar{r}} dx + \int_{Q_{\text{int}}} \frac{|\nabla \mathfrak{h}|^2}{1 + \bar{r}} dx \right).$$

Pour  $\mathfrak{h} = (1 + \bar{r})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}$ , l'inégalité (2.5) fournit

$$\int_G \left| \frac{\mathbf{v}}{(1 + \bar{r})^{\frac{1}{2}}} \right|^2 d\sigma \leq C \left( \int_{Q_{\text{int}}} \left| \frac{\mathbf{v}}{1 + \bar{r}} \right|^2 dx + \int_{Q_{\text{int}}} \frac{1}{1 + \bar{r}} \left| \nabla \left( \frac{\mathbf{v}}{(1 + \bar{r})^{\frac{1}{2}}} \right) \right|^2 dx \right).$$

Or, par développement de l'opérateur  $\nabla$ ,

$$\left| \nabla \left( \frac{\mathbf{v}}{(1+\bar{r})^{\frac{1}{2}}} \right) \right| \leq C \left( \frac{1}{(1+\bar{r})^{\frac{1}{2}}} |\nabla \mathbf{v}| + \frac{1}{(1+\bar{r})^{\frac{3}{2}}} |\mathbf{v}| \right),$$

d'où

$$\frac{1}{1+\bar{r}} \left| \nabla \left( \frac{\mathbf{v}}{(1+\bar{r})^{\frac{1}{2}}} \right) \right|^2 \leq C \left( \frac{1}{(1+\bar{r})^2} |\mathbf{v}|^2 + |\nabla \mathbf{v}|^2 \right).$$

Finalement, on déduit de (2.2)

$$\left| \int_G \mathbf{g} \mathbf{v} \right| \leq C \left\| (1+\bar{r})^{\frac{1}{2}} \mathbf{g} \right\|_{0,G} \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{V}},$$

ce qui montre que  $\mathbf{v} \mapsto \int_G \mathbf{g} \mathbf{v}$  appartient à  $\mathfrak{V}'$ . L'estimation énoncée en découle directement.  $\blacksquare$

Le théorème 2.1 montre que le problème (2.1) est bien posé dans l'espace  $\mathfrak{V}$ . On a précisé, à l'aide du lemme 2.2, la condition  $F \in \mathfrak{V}'$ .

Les seconds membres  $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  du problème (2.1) qu'on sera amené à considérer ne vérifient pas nécessairement la condition d'appartenance à  $\mathfrak{V}'$ . Pour se ramener à un second membre "variationnel", on retranche à  $\mathbf{u}$  une fonction qui résout la partie "non-variationnelle" du second membre initial.

Cette fonction est construite à l'aide d'une résolution alternativement dans  $Q_{\text{ext}}$  et  $Q_{\text{int}}$ , méthode classique en analyse asymptotique. On sera donc ramené à considérer deux problèmes : l'un posé dans le domaine intérieur, l'autre dans le domaine extérieur.

## 2.3 Transformation en domaine homogène

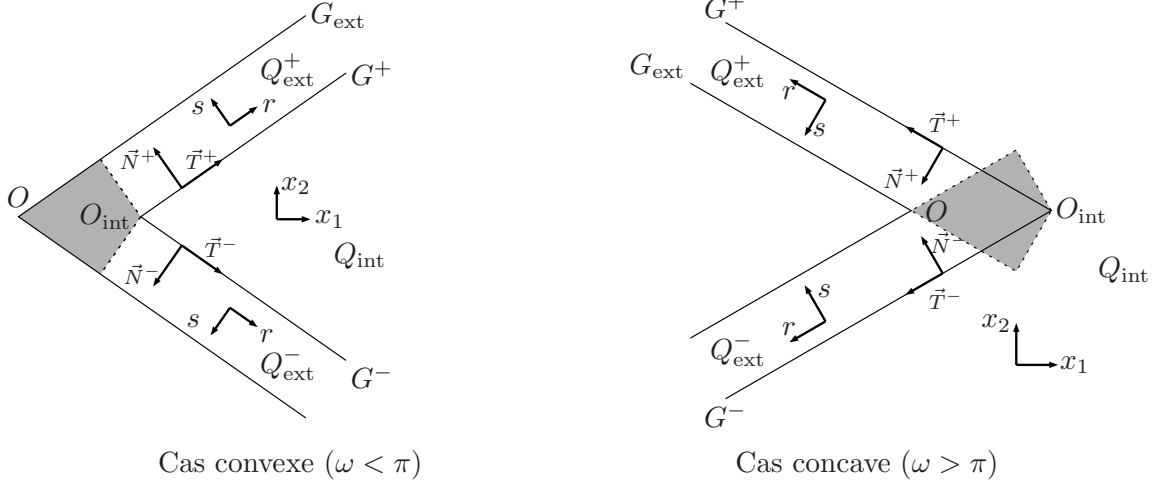
Afin de simplifier l'étude, nous allons tout d'abord transformer le domaine  $Q$  en un domaine homogène (on en verra plus loin la signification précise).

Dans  $Q_{\text{ext}}$ , on note  $\vec{T}^-$  et  $\vec{T}^+$  les vecteurs unitaires des deux demi-droites  $G^-$  et  $G^+$  issues de  $O_{\text{int}}$ . Soient  $\vec{N}^-$  et  $\vec{N}^+$  les normales extérieures à  $Q_{\text{int}}$  le long de ces demi-droites.

On note  $\mathcal{R}^\pm$  les repères  $(O_{\text{int}}, \vec{T}^\pm, \vec{N}^\pm)$  et on définit l'ouvert

$$Q_{\text{ext}}^\pm = \{x \in Q_{\text{ext}} / \text{les coordonnées de } x \text{ dans } \mathcal{R}^\pm \text{ sont strictement positives}\}.$$

Les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{R}^\pm$  définissent un nouveau système de coordonnées, noté  $(r, s)$ .

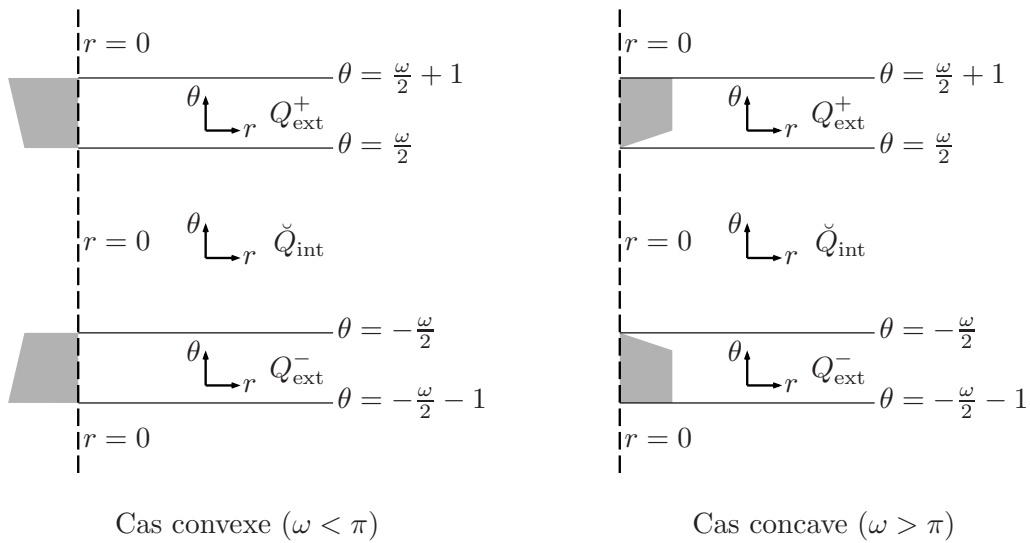


La partie grisée correspond, dans le cas convexe, aux points de  $Q_{\text{ext}}$  pour lesquels les coordonnées  $(r, s)$  ne sont pas définies. Dans le cas concave, il s'agit d'une zone où  $(r, s)$  peut être défini de deux manières différentes. Comme on s'intéresse au comportement à l'infini, on verra qu'on peut s'affranchir de cette difficulté.

Dans  $Q_{\text{int}}$ , on effectue un passage en coordonnées polaires centrées en  $O_{\text{int}}$ , notées  $(r, \theta)$ , et on définit une nouvelle variable  $\theta$  dans  $Q_{\text{ext}}$  par

$$\theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm s \text{ dans } Q_{\text{ext}}^{\pm}.$$

Les figures suivantes fournissent une représentation des domaines obtenus.



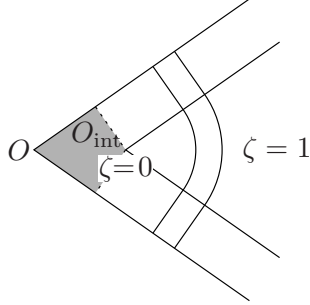
On a noté  $\check{Q}_{\text{int}} = (0, +\infty) \times (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ . Une différence apparaît entre les situations convexe et concave, due aux parties grisées. Cependant elle est localisée au voisinage de la pointe du domaine  $Q$ . Afin d'unifier les deux cas, on introduit une fonction de troncature qui gommerait ce qui se passe au coin.

Soit  $\zeta$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  valant 0 au voisinage de la pointe du domaine  $Q$  :

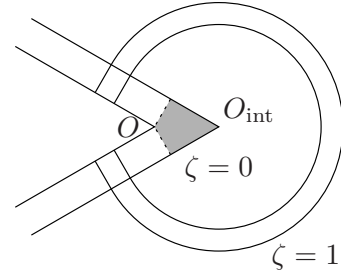
$$\zeta(x) = 0 \quad \text{si } r < r_0,$$

$$\zeta(x) = 1 \quad \text{si } r > r_1.$$

De plus, on choisit  $\frac{1}{\sin \frac{\omega}{2}} \leq r_0 < r_1$ , de sorte que  $\zeta = 0$  dans la partie grisée.



Cas convexe ( $\omega < \pi$ )

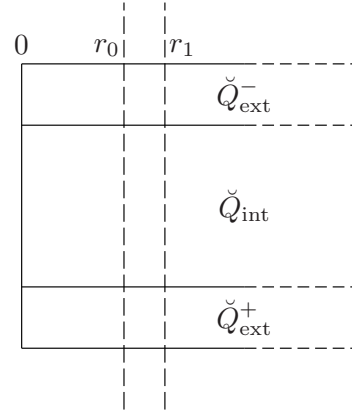


Cas concave ( $\omega > \pi$ )

Plutôt que  $Q_{\text{ext}}^\pm$ , on préférera travailler dans  $\check{Q}_{\text{ext}}^\pm = (0, +\infty) \times \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1)$  si bien que le domaine complet qui nous intéresse est  $\check{Q}$  tel que

$$\overline{\check{Q}} = \overline{\check{Q}_{\text{int}} \cup \check{Q}_{\text{ext}}}.$$

La figure ci-contre représente le domaine  $\check{Q}$  ainsi que les valeurs  $r_0$  et  $r_1$  qui définissent la fonction de troncature  $\zeta$ . La partie  $r > r_0$  correspond à ce qu'on avait obtenu après changement de coordonnées, aussi bien dans le cas convexe que dans le cas concave.



Pour  $x$  dans  $Q$ , tel que  $r > r_0$ , on notera  $\check{x} = \mathcal{F}(x)$  son image dans le domaine  $\check{Q}$ ; la fonction  $\mathcal{F}$  est bijective de  $Q \cap [r > r_0]$  dans  $\check{Q} \cap [r > r_0]$ .

**Définition 2.3** Si  $\check{v}$  désigne une fonction définie sur  $\check{Q}$ , alors  $\mathcal{F}^* \check{v}$  est la fonction définie sur  $Q$  par

$$\mathcal{F}^* \check{v}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq r_0, \\ \zeta(\check{v}[\mathcal{F}(x)]) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette définition nous permettra de passer aisément de  $\check{Q}$ , dans lequel on va travailler pour plus de commodité, au domaine  $Q$ , dans lequel le problème (2.1) est posé.

Le problème (2.1) correspond au problème suivant dans  $\check{Q}$  :

$$(2.6) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \check{u}_{\text{ext}} = \check{f}_{\text{ext}} & \text{dans } \check{Q}_{\text{ext}}, \\ \alpha \check{\Delta} \check{u}_{\text{int}} = \check{f}_{\text{int}} & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{u}_{\text{ext}} = 0 & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \\ \check{u}_{\text{int}} = \check{u}_{\text{ext}} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \alpha \partial_n \check{u}_{\text{int}} = \partial_n \check{u}_{\text{ext}} + \check{g} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \end{array} \right.$$

où  $\check{\Delta} = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2$ .

Attention, cela ne signifie pas qu'il y a équivalence entre les problèmes (2.1) et (2.6) ; on va seulement utiliser les équations (2.6) pour construire une solution au problème initial (2.1). En outre dans le cas concave, la donnée de la fonction  $\check{f}_{\text{ext}}$  ne permet pas toujours de définir  $\check{f}_{\text{ext}}$  de manière immédiate : on choisit alors de prolonger par 0 dans la partie grisée.

## 2.4 Les problèmes élémentaires

Le domaine  $\check{Q}$  est *homogène* dans le sens où il est invariant par dilatation de la variable  $r$ . En effet si, pour  $\rho > 0$  et  $\check{x} = (r, \theta) \in \check{Q}$ , on note  $\rho[\check{x}] = (\rho r, \theta)$ , alors  $\rho[\check{Q}] = \check{Q}$ .

Pour  $\rho > 0$ , on définit la fonction  $\check{u}_\rho$  sur  $\check{Q}$  par

$$\forall \check{x} \in \check{Q}, \check{u}_\rho(\check{x}) = \check{u}(\rho[\check{x}]).$$

Alors  $\check{u}_\rho$  vérifie

$$(2.7) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_\theta^2 \check{u}_{\rho, \text{ext}} + \frac{1}{\rho^2} \partial_r^2 \check{u}_{\rho, \text{ext}} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{ext}}, \\ \frac{1}{\rho^2} \alpha \check{\Delta} \check{u}_{\rho, \text{int}} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{u}_{\rho, \text{ext}} = 0 & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \\ \check{u}_{\rho, \text{int}} = \check{u}_{\rho, \text{ext}} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \frac{\alpha}{r \rho} \partial_\theta \check{u}_{\rho, \text{int}} = \partial_\theta \check{u}_{\rho, \text{ext}} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{array} \right.$$

On suppose que  $\check{u}$  est solution du problème (2.6) avec second membre nul et vérifie

$$\check{u}_{\text{int}}(\check{x}) \sim r^\lambda \text{ quand } r \rightarrow +\infty.$$

Afin d'obtenir un développement asymptotique de  $\check{\mathbf{u}}_\rho$  quand  $\rho \rightarrow +\infty$ , on insère dans les équations (2.7) l'ansatz série entière :

$$\check{\mathbf{u}}_\rho = \sum_{k \geq 0} \rho^{\lambda-k} \check{\mathbf{u}}^k.$$

On obtient alors un problème extérieur dans lequel  $r$  joue le rôle de paramètre :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \partial_\theta^2 \check{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^k = -\partial_r^2 \check{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^{k-2} & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \check{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^k = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathbf{u}}_{\text{int}}^{k-1} & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^k = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{cases}$$

et un problème de Laplace dans  $\check{Q}_{\text{int}}$  :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathbf{u}}_{\text{int}}^k = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathbf{u}}_{\text{int}}^k = \check{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^k & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

On est donc amené à résoudre successivement un problème extérieur et un problème intérieur afin de construire le développement asymptotique.

Les deux paragraphes qui suivent traitent individuellement de chacun de ces deux problèmes.

### 2.4.1 Le problème intérieur : singularités

Le problème intérieur s'écrit

$$(2.10) \quad \begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathbf{R}} = \check{\mathbf{f}} & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathbf{R}} = \check{\mathbf{g}} & \text{sur } G. \end{cases}$$

Son étude relève de la théorie générale des problèmes elliptiques pour les domaines à coins, voir par exemple [12],[20], [26] et [13]. Les solutions de (2.10) font intervenir les espaces  $\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{int}})$  et  $\mathfrak{S}^\lambda(G)$  définis ci-dessous ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{int}}) = \left\{ r^\lambda \sum_{\ell=0}^N \log^\ell r \, v_\ell(\theta) \mid v_\ell \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Theta}_{\text{int}}), N \in \mathbb{N} \right\},$$

$(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires centrées en  $O_{\text{int}}$  et  $\Theta_{\text{int}} = (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^\lambda(G) &= \{ \check{\mathbf{v}}|_G \mid \check{\mathbf{v}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{int}}) \} \\ &= \left\{ r^\lambda \sum_{\ell=0}^N c_\ell^\pm \log^\ell r \text{ sur } G^\pm \mid c_\ell^+, c_\ell^- \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Le problème (2.10) opère naturellement entre les espaces  $\mathfrak{S}^\lambda$ . Précisément, on a le résultat suivant.

**Théorème 2.4** *Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $\check{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{S}^{\lambda-2}(\check{Q}_{\text{int}})$  et  $\check{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{S}^\lambda(G)$ , alors il existe  $\check{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{int}})$  solution de (2.10).*

*Il y a unicité si  $\lambda \notin \frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}^*$ . Sinon,  $\lambda$  s'écrit  $\frac{k\pi}{\omega}$  et le noyau de l'opérateur associé est engendré par la fonction  $\mathfrak{s}^\lambda$  définie par*

$$\mathfrak{s}^\lambda(r, \theta) = \begin{cases} r^{\frac{k\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{k\pi}{\omega}\theta\right), & \text{si } k \text{ est impair,} \\ r^{\frac{k\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{k\pi}{\omega}\theta\right), & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \quad \theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right).$$

*Enfin, si  $\frac{\pi}{\omega} \notin \mathbb{Q}$ , alors la solution  $\check{\mathfrak{K}}$  ne comporte pas de terme logarithmique ( $N = 0$ ).*

**Remarque.** *La fonction  $\mathfrak{s}^\lambda \in \mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{int}})$  est appelée singularité du problème (2.10) et le nombre  $\lambda = \frac{k\pi}{\omega}$  exposant de singularité.*

## 2.4.2 Le problème extérieur

Le problème qui nous intéresse s'écrit :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \partial_\theta^2 \check{\mathfrak{K}}(r, \theta) = \check{\mathfrak{f}}(r, \theta) & \text{pour } \theta \in \Theta_{\text{ext}}^- \cup \Theta_{\text{ext}}^+, \\ \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}(r, \pm \frac{\omega}{2}) = \check{\mathfrak{h}}^\pm(r), \\ \check{\mathfrak{K}}(r, \pm \frac{\omega}{2} \pm 1) = 0, \end{cases}$$

où on a posé  $\Theta_{\text{ext}}^\pm = \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1)$ ;  $r$  joue le rôle de paramètre. La donnée de Neumann  $\check{\mathfrak{h}}^\pm$  qu'on va utiliser appartient naturellement à l'espace  $\mathfrak{S}^\lambda(G)$  (voir §2.5 ci-dessous). On introduit donc l'espace

$$\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{ext}}) = \left\{ \check{\mathfrak{u}} = \sum_{\ell=0}^N \theta^\ell \psi_\ell^\pm(r) \text{ dans } \check{Q}_{\text{ext}} / \psi_\ell^\pm \in \mathfrak{S}^\lambda(G^\pm) \right\}.$$

L'espace  $\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{ext}})$  est l'espace naturel des solutions de (2.11) :

**Théorème 2.5** *Si  $\check{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{ext}})$  et  $\check{\mathfrak{h}}^\pm \in \mathfrak{S}^\lambda(G)$ , alors il existe une unique solution dans  $\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{ext}})$  au problème (2.11). Elle est donnée par la formule :*

$$(2.12) \quad \check{\mathfrak{K}}(r, \theta) = \int_\theta^{\sigma(\frac{\omega}{2}+1)} \left( -\check{\mathfrak{h}}^\sigma(r) + \int_{\sigma\frac{\omega}{2}}^y \check{\mathfrak{f}}(r, z) dz \right) dy \quad \text{et } \sigma = \text{signe}(\theta).$$

DÉMONSTRATION. La vérification est immédiate. ■

## 2.5 Développement asymptotique “sur-variationnel”

### 2.5.1 L’espace des fonctions singulières en l’infini

On introduit l’espace suivant :

$$\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}) = \left\{ \check{u} / \check{u}_{\text{int}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{int}}), \check{u}_{\text{ext}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}_{\text{ext}}) \text{ et } \check{u}_{\text{int}} = \check{u}_{\text{ext}} \text{ sur } G \right\}.$$

Le lemme suivant compare ces espaces avec l’espace variationnel  $\mathfrak{V}$  introduit au paragraphe 2.2.

**Lemme 2.6**  $\mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q})) \subset \mathfrak{V}$  ssi  $\lambda < 0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathfrak{v} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q}))$ . Le comportement de  $\mathfrak{v}$  en  $+\infty$  est régi par  $r^\lambda$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{v}_{\text{int}}}{r} &\in L^2(Q_{\text{int}}) \iff \lambda < 0, \\ \nabla \mathfrak{v}_{\text{int}} &\in L^2(Q_{\text{int}}) \iff \lambda < 0, \\ \frac{\mathfrak{v}_{\text{ext}}}{r} &\in L^2(Q_{\text{ext}}) \iff \lambda < \frac{1}{2}, \\ \nabla \mathfrak{v}_{\text{ext}} &\in L^2(Q_{\text{ext}}) \iff \lambda < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d’où le résultat (le comportement au voisinage de coin n’intervient pas car la fonction  $\mathcal{F}^*$  a un effet de troncature). ■

### 2.5.2 Solution au problème avec comportement à l’infini

L’objet de ce paragraphe est de construire un élément du noyau de l’opérateur associé à (2.1). Plus précisément, on recherche les solutions du problème homogène qui ont le même comportement à l’infini que la fonction singulière  $\mathfrak{s}^\Lambda$  du problème intérieur, où  $\Lambda = \frac{k\pi}{\omega}$ .

On considère donc le problème de transmission homogène avec condition à l’infini :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}} \cup Q_{\text{ext}}, \\ u_{\text{ext}} = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ u_{\text{int}} = u_{\text{ext}} & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}} = \partial_n u_{\text{ext}} & \text{sur } G, \\ u_{\text{int}} \sim \mathfrak{s}^\Lambda & \text{quand } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Le théorème suivant montre qu’on peut construire une solution au problème (2.13) :



**Théorème 2.7** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Lambda = \frac{k\pi}{\omega}$ . Soit  $p$  un entier tel que  $p+1 \geq \Lambda$ . Il existe  $\mathbf{u}^{\Lambda,p} \in \mathfrak{V}$  et  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda,\Lambda}, \dots, \check{\mathfrak{K}}^{\Lambda,\Lambda-p}$  respectivement éléments des espaces  $\mathfrak{S}^\Lambda(\check{Q}), \dots, \mathfrak{S}^{\Lambda-p}(\check{Q})$  tels que

$$(2.14) \quad \mathfrak{K}^\Lambda := \mathcal{F}^*(\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda,\Lambda}) + \dots + \mathcal{F}^*(\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda,\Lambda-p}) + \mathbf{u}^{\Lambda,p}$$

soit solution de (2.13).

Les fonctions  $\mathfrak{K}^\Lambda$  et  $\mathfrak{K}^{\Lambda,\Lambda-q}$  ( $q \in \mathbb{N}$ ) peuvent être choisies indépendamment de  $p$ , ce qu'on suppose pour la suite. Enfin, les termes  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda,\Lambda-q}$  sont construits par récurrence à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\theta^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-q} = -\partial_r^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-q+2} & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-q} = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda-q+1} & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-q} = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda-q} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda-q} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-q} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On travaille dans la demi-bande infinie  $\check{Q}$  en résolvant alternativement les problèmes extérieur et intérieur.

**Étape 0** – On résout d'abord le problème extérieur (2.11) avec second membre nul si bien que la solution est

$$\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda} = 0.$$

On remplace ensuite  $\check{\mathfrak{g}}$  par  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda}|_G$  dans (2.10) pour aboutir à

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda} = 0 & \text{sur } G, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda} \sim \mathfrak{s}^\Lambda & \text{quand } r \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

dont  $\mathfrak{s}^\Lambda$  est une solution. On prendra donc comme premier terme du développement

$$\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda,\Lambda} = \mathfrak{s}_0^\Lambda \in \mathfrak{S}^\Lambda(\check{Q}),$$

la fonction  $\mathfrak{s}_0^\Lambda$  est le prolongement de  $\mathfrak{s}^\Lambda$  à  $Q$  tel que  $\mathfrak{s}_0^\Lambda|_{Q_{\text{ext}}} = 0$ .

**Étape 1** – Soit  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-1}$  la solution de (2.11) avec  $\check{\mathfrak{f}} = 0$  et  $\check{\mathfrak{h}}^\pm = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda,\Lambda}|_{G^\pm} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-1}(G)$ . D'après le théorème 2.5,

$$\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda,\Lambda-1} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-1}(\check{Q}_{\text{ext}}).$$

On définit alors  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda}$  comme une solution dans  $\mathfrak{S}^{\Lambda-1}(\check{Q}_{\text{int}})$  du problème (2.10) avec  $\check{\mathfrak{f}} = 0$  et  $\check{\mathfrak{g}} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-1}|_G \in \mathfrak{S}^{\Lambda-1}(G)$  (cf. théorème 2.4). Ainsi on a construit

$$\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-1} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-1}(\check{Q}).$$

**Étape  $i$  ( $i \geq 2$ )** – On suppose  $(\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-j})_{j < i}$  construits tels que

$$\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-j} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-j}(\check{Q}).$$

Soit alors  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-i}$  la solution de (2.11) avec  $\check{\mathfrak{f}} = -\partial_r^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-i+2}$  et  $\check{\mathfrak{h}}^\pm = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-i+1}|_{G^\pm}$ .

Puisqu'on a  $\check{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-i}(\check{Q}_{\text{ext}})$  et  $\check{\mathfrak{h}}^\pm \in \mathfrak{S}^{\Lambda-i}(G)$ , le théorème 2.5 assure que

$$\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-i} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-i}(\check{Q}_{\text{ext}}).$$

Maintenant que  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-i}$  est connu, on est en mesure de construire  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-i}$  solution du problème intérieur (2.10) avec  $\check{\mathfrak{f}} = 0$  et  $\check{\mathfrak{g}} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-i}|_G \in \mathfrak{S}^{\Lambda-i}(G)$ . D'après le théorème 2.4, on peut choisir  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-i}$  dans  $\mathfrak{S}^{\Lambda-i}(\check{Q}_{\text{int}})$ .

Ainsi, à partir de la donnée de  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-j}$  pour  $j < i$ , on a construit  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-i} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-i}(\check{Q})$ . Par récurrence, la suite  $(\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-i})_{i \in \mathbb{N}}$  est bien définie dans  $\mathfrak{S}^{\Lambda-i}(\check{Q})$ .

**Conclusion.** Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note

$$\tilde{\mathfrak{u}}^{\Lambda, p} = - \sum_{i=0}^p \mathcal{F}^* \left( \check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-i} \right).$$

Par construction,  $\tilde{\mathfrak{u}}^{\Lambda, p}$  vérifie le problème suivant

$$(2.15) \quad \begin{cases} \alpha \Delta \tilde{\mathfrak{u}}_{\text{int}}^{\Lambda, p} = \alpha \varphi_p & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \Delta \tilde{\mathfrak{u}}_{\text{ext}}^{\Lambda, p} = -\phi_p + \varphi_p & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \tilde{\mathfrak{u}}^{\Lambda, p} = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \tilde{\mathfrak{u}}_{\text{int}}^{\Lambda, p} = \tilde{\mathfrak{u}}_{\text{ext}}^{\Lambda, p} & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \tilde{\mathfrak{u}}_{\text{int}}^{\Lambda, p} = \partial_n \tilde{\mathfrak{u}}_{\text{ext}}^{\Lambda, p} - \psi_p & \text{sur } G, \end{cases}$$

les seconds membres  $\phi_p$  et  $\psi_p$  sont dus aux décalages d'indices :

$$\begin{aligned} \phi_p &= \mathcal{F}^* \left( \partial_r^2 \left( \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-p} + \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-p+1} \right) \right) \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^{\Lambda-p-2}(\check{Q}_{\text{ext}}) \oplus \mathfrak{S}^{\Lambda-p-1}(\check{Q}_{\text{ext}}) \right), \\ \psi_p &= \mathcal{F}^* \left( \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-p} \right) \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^{\Lambda-p-1}(G) \right); \end{aligned}$$

le terme  $\varphi_p$  provient de la troncature, il est à support dans la “couronne” définie par  $r_0 < r < r_1$ .

Si  $p$  est choisi suffisamment grand le second membre de (2.15) appartient à  $\mathfrak{V}'$ . En effet, d'après le lemme 2.2, il suffit d'avoir

$$\begin{aligned}\bar{r}(-\phi_p + \varphi_p) &\in L^2(Q_{\text{ext}}), \\ \bar{r}(\varphi_p) &\in L^2(Q_{\text{int}}), \\ \bar{r}^{\frac{1}{2}}(\psi_p) &\in L^2(G).\end{aligned}$$

Cela est assuré par la condition  $p > \Lambda + \frac{1}{2}$ .

En conséquence du théorème 2.1, il existe un unique élément  $\mathbf{u}^{\Lambda,p} \in \mathfrak{V}$ , solution de (2.15). Ainsi

$$\mathbf{u}^{\Lambda,p} + \sum_{i=0}^p \mathcal{F}^* \left( \check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-i} \right) \text{ résout (2.13).}$$

En vertu du lemme 2.6, les termes  $\mathcal{F}^* \left( \check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-i} \right)$  pour  $\Lambda - i < 0$  appartiennent à l'espace variationnel  $\mathfrak{V}$  si bien que le résultat est valable pour  $p + 1 \geq \Lambda$ .

La construction des termes  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-q}$  exposée dans la démonstration est indépendante de l'entier  $p \geq \Lambda$ . Par ailleurs, les termes  $\mathbf{u}^{\Lambda, p+1}$  et  $\mathbf{u}^{\Lambda, p} + \mathcal{F}^* \left( \check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} \right)$  vérifient le même problème dans l'espace variationnel  $\mathfrak{V}$ . L'unicité dans le théorème 2.1 permet de conclure qu'ils sont égaux, ce qui prouve que la solution  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda}$  construite dans la démonstration ne dépend pas de l'entier  $p \geq \Lambda$ . ■

**Remarque.** Si on pousse le développement (2.14) pour  $p$  grand, on n'obtient aucune information supplémentaire concernant le comportement en  $+\infty$ , les seuls termes significatifs dans (2.14) sont ceux qui se situent “au-dessus” de l'espace variationnel  $\mathfrak{V}$ .

D'autre part, la connaissance du noyau du problème intérieur (2.10) permet de comprendre que la solution construite est unique modulo les singularités du problème intérieur qui peuvent apparaître à chaque étape.

## 2.6 Régularité variationnelle dans les espaces à poids

On s'intéresse ici à la régularité de la solution  $\mathbf{u}^{\Lambda,p}$ , qui apparaît sous la forme d'un reste dans l'énoncé du théorème 2.7. La technique consiste à utiliser des estimations elliptiques locales et à les transporter à l'infini ; des normes à poids apparaissent naturellement, définissant les espaces naturels pour caractériser la régularité de  $\mathbf{u}^{\Lambda,p}$ .

Comme on ne s'intéresse qu'au comportement en l'infini, il suffit de considérer  $\mathbf{u}^0 = \zeta \mathbf{u}^{\Lambda,p}$ .

### 2.6.1 Estimation elliptique locale

#### Écriture du problème dans la bande

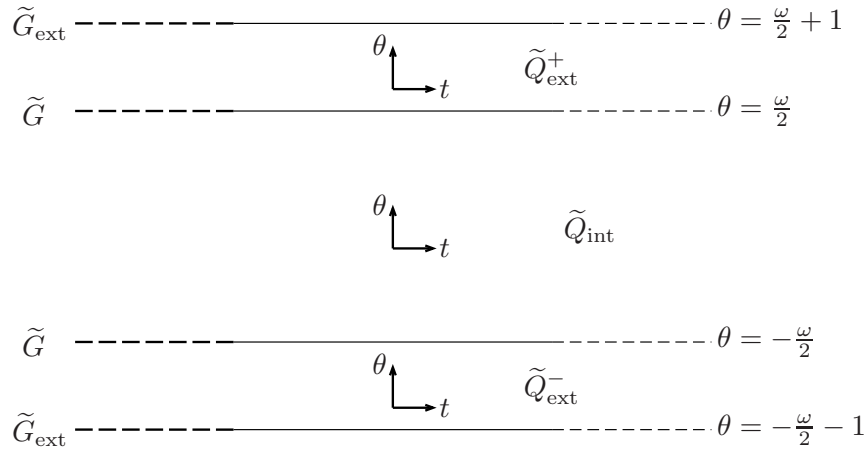
On transforme le domaine  $\check{Q}$  via le changement de variable

$$t = \log r.$$

Quand  $(r, \theta)$  parcourt  $\check{Q}$ ,  $(t, \theta)$  appartient à la bande infinie  $\tilde{Q} = \mathbb{R} \times (-\frac{\omega}{2} - 1, \frac{\omega}{2} + 1)$ .

Il n'y a pas de correspondance bijective entre  $Q$  et  $\tilde{Q}$  au voisinage du coin (i.e.  $t \rightarrow -\infty$ ). Comme on s'intéresse au comportement en l'infini ( $t \rightarrow +\infty$ ), on pourra néanmoins raisonner dans  $\tilde{Q}$ . Cela présente l'avantage de retrouver l'opérateur de Laplace, plus simple à manipuler que l'opérateur polaire  $\check{\Delta}$ .

La figure qui suit représente le domaine  $\tilde{Q}$  avec le système de coordonnées qu'on va utiliser par la suite.



Si  $\check{\mathbf{v}}$  est une fonction définie sur  $\check{Q}$ , on notera  $\tilde{\mathbf{v}}$  la fonction donnée sur  $\tilde{Q}$  par

$$\tilde{\mathbf{v}}(t, \theta) = \check{\mathbf{v}}(r, \theta).$$

Le problème (2.6) devient après changement de variable

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha e^{-2t} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2) \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{int}} & \text{dans } \tilde{Q}_{\text{int}}, \\ [\partial_\theta^2 + e^{-2t} (\partial_t^2 - \partial_t)] \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} & \text{dans } \tilde{Q}_{\text{ext}}, \\ \alpha e^{-t} \partial_\theta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}} = \partial_\theta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} + \tilde{\mathbf{g}} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} = 0 & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1. \end{array} \right.$$

Il s'écrit  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v})$  sous forme variationnelle, avec

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \int_{\tilde{Q}_{\text{int}}} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}} \nabla \tilde{\mathbf{v}}_{\text{int}} \, dx + \int_{\tilde{Q}_{\text{ext}}} [e^t \partial_\theta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \partial_\theta \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ext}} + e^{-t} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \partial_t \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ext}}] \, dx,$$

$$l(\mathbf{v}) = - \int_{\tilde{Q}_{\text{int}}} e^{2t} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{int}} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{int}} \, dx - \int_{\tilde{Q}_{\text{ext}}} e^t \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ext}} \, dx + \int_{\tilde{G}} e^t \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{v}} \, d\sigma.$$

On note  $T_{\text{int}}$ ,  $T_{\text{ext}}$  et  $T_{\text{tr}}$  les opérateurs différentiels intervenant dans le problème (2.16) :

$$T_{\text{int}} = \alpha e^{-2t} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2), \quad T_{\text{ext}} = [\partial_\theta^2 + e^{-2t} (\partial_t^2 - \partial_t)] \quad \text{et} \quad T_{\text{tr}} = \alpha e^{-t} \partial_{\theta, \text{int}} - \partial_{\theta, \text{ext}}.$$

On utilisera aussi les opérateurs à coefficients constants définis à partir des opérateurs précédents pour  $t = t_0$  :

$$T_{\text{int}}^0 = \alpha (\partial_t^2 + \partial_\theta^2), \quad T_{\text{ext}}^0 = [e^{2t_0} \partial_\theta^2 + \partial_t^2 - \partial_t] \quad \text{et} \quad T_{\text{tr}}^0 = \alpha \partial_{\theta, \text{int}} - e^{t_0} \partial_{\theta, \text{ext}}.$$

Dans un premier temps, on va étudier les opérateurs  $T_{\text{int}}^0, T_{\text{ext}}^0, T_{\text{tr}}^0$  en utilisant les résultats du premier chapitre. On reviendra ensuite au problème initial qui concerne les opérateurs à coefficients variables  $T_{\text{int}}, T_{\text{ext}}$  et  $T_{\text{tr}}$ .

Posons  $\varepsilon = e^{-t_0}$  et effectuons une contraction dans la couche extérieure de rapport  $\varepsilon$  : on pose, dans  $\tilde{Q}_{\text{ext}}$ ,

$$s = \pm \frac{\omega}{2} + \varepsilon \left( \theta \mp \frac{\omega}{2} \right).$$

On note  $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon$  la fonction transformée de  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Les opérateurs à coefficients constants deviennent

$$T_{\text{int}}^{0, \varepsilon} = T_{\text{int}}^0 = \alpha \Delta, \quad T_{\text{ext}}^{0, \varepsilon} = \Delta - \partial_t \quad \text{et} \quad T_{\text{tr}}^{0, \varepsilon} = \alpha \partial_\theta - \partial_s,$$

si bien que le nouveau problème, posé dans  $\tilde{Q}^\varepsilon$ , domaine transformé de  $\tilde{Q}$ , est tout simplement le problème de transmission étudié dans le chapitre 1 (avec un terme  $-\partial_t \mathbf{u}_{\text{ext}}^\varepsilon$  en plus, qui ne change rien aux résultats obtenus car ne modifie pas la partie principale de l'opérateur). On peut alors utiliser les estimations du paragraphe 1.2 : soient  $\mathcal{R}^\varepsilon$  et  $\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$  les rectangles

$$\mathcal{R}^\varepsilon = \{x \in \tilde{Q}^\varepsilon \mid t_0 - \eta < t < t_0 + \eta\} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon = \{x \in \tilde{Q}^\varepsilon \mid t_0 - 2\eta < t < t_0 + 2\eta\},$$

alors, d'après la proposition 1.6, pour tout entier  $m$ ,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}^\varepsilon\|_{m+2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^\varepsilon\|_{m+2, \mathcal{R}_{\text{ext}}} &\leq C \left[ \left\| T_{\text{int}}^{0, \varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}^\varepsilon \right\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \left\| T_{\text{ext}}^{0, \varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}^\varepsilon \right\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right. \\ &\quad \left. + \left\| T_{\text{tr}}^{0, \varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon \right\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon\|_{0, \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon} \right], \end{aligned}$$

où  $\hat{\gamma} = G \cap \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$ . Il suffit ensuite de repasser des variables  $(t, s)$  aux variables  $(t, \theta)$  – on note  $\mathcal{R}$  et  $\hat{\mathcal{R}}$  les rectangles

$$\mathcal{R} = \{x \in \tilde{Q} \mid t_0 - \eta < t < t_0 + \eta\} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{R}} = \{x \in \tilde{Q} \mid t_0 - 2\eta < t < t_0 + 2\eta\},$$

alors

$$(2.17) \quad \begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \left( \sum_{|\beta| \leq m+2} \varepsilon^{1-2\beta_\theta} \|\partial^\beta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \mathcal{R}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left[ \|T_{\text{int}}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \left( \sum_{|\beta| \leq m} \varepsilon^{1-2\beta_\theta} \|\partial^\beta T_{\text{ext}}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \|T_{\text{tr}}^0 \tilde{\mathbf{u}}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right], \end{aligned}$$

(dans les sommes, le bi-indice  $\beta$  s'écrit  $(\beta_t, \beta_\theta)$ , si bien que les puissances négatives de  $\varepsilon$  sont liées aux dérivées selon  $\theta$  seulement). Il reste enfin à déduire une inégalité similaire pour l'opérateur à coefficients variables qui nous intéresse, sous une condition sur la largeur des rectangles  $\mathcal{R}$  et  $\hat{\mathcal{R}}$ .

**Proposition 2.8** *Il existe  $\eta_0 \in (0, 1)$  tel que si  $\eta < \eta_0$ , alors on a l'estimation pour tout  $m \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + \left( \sum_{|\beta| \leq m+2} e^{2\beta_\theta t_0 - t_0} \|\partial^\beta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \mathcal{R}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left[ e^{2t_0} \|T_{\text{int}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + e^{2t_0} \left( \sum_{|\beta| \leq m} e^{2\beta_\theta t_0 - t_0} \|\partial^\beta T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + e^{t_0} \|T_{\text{tr}} \tilde{\mathbf{u}}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + e^{-\frac{t_0}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right] \end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $\eta_0$  et de  $m$ , mais pas de  $t_0$ .

DÉMONSTRATION. Il s'agit, ici, de comparer les opérateurs  $T_{\text{int}}, T_{\text{ext}}, T_{\text{tr}}$  d'une part, et  $T_{\text{int}}^0, T_{\text{ext}}^0, T_{\text{tr}}^0$  d'autre part. Notons tout d'abord qu'il suffit de montrer l'estimation énoncée avec des normes  $H^{m+1}$  au lieu des normes  $L^2$  de  $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}$ .

Soit  $\tilde{\mathcal{R}}$  un domaine tel que  $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{R}} \subset \hat{\mathcal{R}}$  et  $\wp \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{R}})$  une fonction de troncature régulière

telle que  $\wp|_{\mathcal{R}} = 1$ . L'estimation (2.17) permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \left( \sum_{|\beta| \leq m+2} \varepsilon^{1-2\beta_\theta} \|\partial^\beta (\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}})\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left[ \|T_{\text{int}}^0(\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}})\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \left( \sum_{|\beta| \leq m} \varepsilon^{1-2\beta_\theta} \|\partial^\beta T_{\text{ext}}^0(\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}})\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \|T_{\text{tr}}^0(\wp \tilde{\mathbf{u}})\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right]. \end{aligned}$$

On a clairement

$$\begin{aligned} \|T_{\text{int}}^0(\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}})\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} & \leq \|\wp T_{\text{int}}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + C \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \\ & \leq C \left( e^{2t_0} \|T_{\text{int}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|\wp T_{\text{ext}}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \leq C e^{2t_0} \left( \|\wp T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} + \|\wp (e^{-2t_0} - e^{-2t})(\partial_t^2 - \partial_t) \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right).$$

Comme  $|t - t_0| \leq 2\eta$ , on peut écrire :

$$\|\wp T_{\text{ext}}^0 \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \leq C \left( e^{2t_0} \|T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} + (e^{4\eta} - 1) \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m+2, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|T_{\text{ext}}^0(\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}})\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} & \leq C \left( e^{2t_0} \|T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} + (e^{4\eta} - 1) \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m+2, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right. \\ & \quad \left. + \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m+1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \|T_{\text{tr}}^0(\wp \tilde{\mathbf{u}})\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} & \leq C \left( e^{t_0} \|\wp T_{\text{tr}} \tilde{\mathbf{u}}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + (e^{2\eta} - 1) \|\wp \partial_\theta \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} \right) \\ & \leq C \left( e^{t_0} \|T_{\text{tr}} \tilde{\mathbf{u}}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + (e^{2\eta} - 1) \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} \right). \end{aligned}$$

Pour  $\eta$  assez petit, les termes contenant des normes d'ordre  $m+2$  au second membre peuvent être déplacés dans le membre de gauche. Utilisant le fait que  $\wp = 0$  sur  $\hat{\mathcal{R}} \setminus \tilde{\mathcal{R}}$ , on

obtient

$$\begin{aligned}
& \|\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + \left( \sum_{|\beta| \leq m+2} e^{2\beta_\theta t_0 - t_0} \|\partial^\beta (\wp \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}})\|_{0, \tilde{\mathcal{R}}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq 2C \left[ e^{2t_0} \|T_{\text{int}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + e^{2t_0} \left( \sum_{|\beta| \leq m} e^{2\beta_\theta t_0 - t_0} \|\partial^\beta T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + e^{t_0} \|T_{\text{tr}} \tilde{\mathbf{u}}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + e^{-\frac{t_0}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m+1, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right].
\end{aligned}$$

Comme  $\wp = 1$  dans  $\mathcal{R}$ , on obtient bien le résultat.  $\blacksquare$

On aura besoin plus loin du résultat suivant, qui est plus grossier que celui contenu dans la proposition 2.8 mais qui s'avérera commode.

**Corollaire 2.9** *Il existe  $\eta_0 \in (0, 1)$  tel que si  $\eta < \eta_0$ , alors on a l'estimation pour tout  $m \geq 0$*

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \mathcal{R}_{\text{int}}} + e^{-\frac{t_0}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m+2, \mathcal{R}_{\text{ext}}} & \leq C \left[ e^{2t_0} \|T_{\text{int}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + e^{(\frac{3}{2}+m)t_0} \|T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{m, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right. \\
& \quad \left. + e^{t_0} \|T_{\text{tr}} \mathbf{u}\|_{m+\frac{1}{2}, \hat{\gamma}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{int}}} + e^{-\frac{t_0}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}\|_{0, \hat{\mathcal{R}}_{\text{ext}}} \right]
\end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $\eta_0$  et de  $m$ , mais pas de  $t_0$ .

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.8.  $\blacksquare$

## 2.6.2 Espaces à poids et régularité du terme variationnel

### Utilisation des estimations locales

À partir des estimations locales données par le corollaire 2.9, on peut déduire une estimation globale pour toute fonction  $\tilde{\mathbf{u}}$  définie sur  $\tilde{Q}$ .



**Proposition 2.10** *Sous les hypothèses du corollaire 2.9, on a pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} & \|e^{\delta t} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}\|_{m+2, \tilde{Q}_{\text{int}} \cap [t>0]} + \left\| e^{(\delta-\frac{1}{2})t} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \right\|_{m+2, \tilde{Q}_{\text{ext}} \cap [t>0]} \leq C \left[ \left\| e^{(\delta+2)t} T_{\text{int}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}} \right\|_{m, \tilde{Q}_{\text{int}} \cap [t>-\eta_0]} \right. \\ & \quad + \left\| e^{(\frac{3}{2}+\delta+m)t} T_{\text{ext}} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \right\|_{m, \tilde{Q}_{\text{ext}} \cap [t>-\eta_0]} + \left\| e^{(\delta+1)t} T_{\text{tr}} \tilde{\mathbf{u}} \right\|_{m+\frac{1}{2}, \tilde{G} \cap [t>-\eta_0]} \\ & \quad \left. + \left\| e^{\delta t} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}} \right\|_{0, \tilde{Q}_{\text{int}} \cap [t>-\eta_0]} + \left\| e^{(\delta-\frac{1}{2})t} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}} \right\|_{0, \tilde{Q}_{\text{ext}} \cap [t>-\eta_0]} \right], \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de multiplier les inégalités locales par  $e^{\delta t_0}$  et de les sommer (pour  $t_0 \in \eta\mathbb{N}^*$ ), en remarquant que, dans les rectangles  $\mathcal{R}$  et  $\hat{\mathcal{R}}$ ,  $t$  est de l'ordre de  $t_0$  : les normes  $\|e^t \mathbf{q}\|_m$  et  $e^{t_0} \|\mathbf{q}\|_m$  sont équivalentes. ■

### Espaces à poids

L'inégalité de la proposition 2.10 suggère l'introduction d'espaces à poids.

**Définition 2.11** *Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$  ; l'espace  $K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}})$  est défini par*

$$K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}}) = \left\{ \tilde{\mathbf{v}} \in L_{\text{loc}}^2(\tilde{Q}_{\text{int}}) \mid \forall |\beta| \leq m, e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(\tilde{Q}_{\text{int}}) \right\},$$

avec la norme naturelle

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}})}^2 = \sum_{|\beta| \leq m} \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{\mathbf{v}} \right\|_{0, \tilde{Q}_{\text{int}}}^2 \simeq \left\| e^{(\gamma-m)t} \tilde{\mathbf{v}} \right\|_{m, \tilde{Q}_{\text{int}}}^2.$$

De même on définit l'espace  $K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{ext}})$  par

$$K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{ext}}) = \left\{ \tilde{\mathbf{v}} \in L_{\text{loc}}^2(\tilde{Q}_{\text{ext}}) \mid \forall |\beta| \leq m, e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(\tilde{Q}_{\text{ext}}) \right\},$$

avec la norme naturelle

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{ext}})}^2 = \sum_{|\beta| \leq m} \left\| e^{(\gamma-m)t} \partial^\beta \tilde{\mathbf{v}} \right\|_{0, \tilde{Q}_{\text{ext}}}^2 \simeq \left\| e^{(\gamma-m)t} \tilde{\mathbf{v}} \right\|_{m, \tilde{Q}_{\text{ext}}}^2.$$

Enfin, on note  $K_{\gamma-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}(\tilde{G})$  l'espace des traces de  $K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}})$  sur  $\tilde{G}$  :

$$K_{\gamma-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}(\tilde{G}) = \left\{ \tilde{\mathbf{g}} \in L_{\text{loc}}^2(\tilde{G}) \mid \exists \tilde{\mathbf{q}} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}}), \tilde{\mathbf{q}}|_{\tilde{G}} = \tilde{\mathbf{g}} \right\},$$

muni de la norme

$$\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{K_{\gamma-\frac{1}{2}}^m(\tilde{G})}^2 = \inf \left\{ \|\tilde{\mathbf{q}}\|_{K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}})} \mid \tilde{\mathbf{q}} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}}) \text{ et } \tilde{\mathbf{q}}|_{\tilde{G}} = \tilde{\mathbf{g}} \right\}.$$

De manière naturelle, on note  $K_\gamma^m(\tilde{Q})$  l'ensemble des fonctions  $\tilde{\mathbf{v}}$  telles que  $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{int}} \in K_\gamma^m(\tilde{Q}_{\text{int}})$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ext}} \in K_{\gamma-\frac{1}{2}}^m(\tilde{Q}_{\text{ext}})$  et  $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{int}} = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ext}}$  sur  $\tilde{G}$ . Le lemme suivant précise quelques-unes des propriétés des espaces  $K_\gamma^m(\tilde{Q})$ , qui vont nous être utiles.

**Lemme 2.12** *Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $\gamma, \gamma', \lambda \in \mathbb{R}$ .*

- $K_\gamma^m(\tilde{Q}) \subset K_{\gamma-m}^0(\tilde{Q})$ .
- $\gamma > \gamma' \implies K_\gamma^m(\tilde{Q}) \subset K_{\gamma'}^m(\tilde{Q})$ .
- Soit  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\tilde{Q})$  non nul, on définit la fonction  $\tilde{\mathbf{v}}$  par  $\tilde{\mathbf{v}}(t, \theta) = \tilde{\mathbf{v}}(r, \theta)$ , alors

$$\zeta \tilde{\mathbf{v}} \in K_\gamma^0(\tilde{Q}) \iff \lambda < -\gamma ;$$

dans ce cas,  $\zeta \tilde{\mathbf{v}} \in K_{\gamma+m}^m(\tilde{Q})$ .

- Si  $\mathbf{v}$  appartient à l'espace variationnel  $\mathfrak{V}$ , soit  $\zeta \tilde{\mathbf{v}}$  telle que  $\zeta \tilde{\mathbf{v}}(t, \theta) = \zeta \mathbf{v}(x_1, x_2)$  alors  $\zeta \tilde{\mathbf{v}}$  appartient à  $K_0^0(\tilde{Q})$ .

DÉMONSTRATION. Seul les deux derniers points ne sont pas évidents.

- Soit  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{S}^\lambda(\tilde{Q})$ , alors le comportement de  $\tilde{\mathbf{v}}$  en l'infini est régi par  $e^{\lambda t}$ , d'où la condition  $\lambda < -\gamma$ . D'autre part, la structure des fonctions de  $\mathfrak{S}^\lambda(\tilde{Q})$  permet de montrer que  $\partial^\beta \tilde{\mathbf{v}}$  a un comportement en l'infini du type  $e^{(\lambda-|\beta|)t}$ , ce qui prouve que  $\tilde{\mathbf{v}} \in K_{\gamma+m}^m(\tilde{Q})$  pour tout entier  $m$ .
- Soit  $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}$ . Par définition de l'espace  $\mathfrak{V}$ ,

$$\frac{\mathbf{v}}{1+\bar{r}} \in L^2(Q).$$

Si on transporte cette condition dans les coordonnées  $(t, \theta)$ , on obtient

$$\zeta \tilde{\mathbf{v}}_{\text{int}} \in L^2(\tilde{Q}_{\text{int}}) \quad \text{et} \quad e^{-\frac{t}{2}} \zeta \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ext}} \in L^2(\tilde{Q}_{\text{ext}}),$$

ce qui montre bien que  $\tilde{\mathbf{v}} \in K_0^0(\tilde{Q})$ . ■

En termes d'espaces à poids, la proposition 2.10 se traduit de la façon suivante.

**Théorème 2.13** *Soit  $\tilde{u}$  solution du problème (2.16). Si les données vérifient, pour  $m \geq 2$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,*

$$\tilde{f}_{\text{int}} \in K_{\gamma}^{m-2}(\tilde{Q} \cap [t > -1]), \quad \tilde{f}_{\text{ext}} \in K_{\gamma+m-2}^{m-2}(\tilde{Q} \cap [t > -1]) \quad \text{et} \quad \tilde{g} \in K_{\gamma-\frac{1}{2}}^{m-\frac{3}{2}}(\tilde{G} \cap [t > -1]),$$

*et si, de plus,*

$$\tilde{u} \in K_{\gamma-m}^0(\tilde{Q} \cap [t > -1]),$$

*Alors*

$$\tilde{u} \in K_{\gamma}^m(\tilde{Q} \cap [t > 0]).$$

### Régularité du terme variationnel

On note  $\tilde{u}^0$  la fonction  $\zeta \tilde{u}^{\Lambda, p}$ , partie tronquée au coin de la solution variationnelle du paragraphe 2.5. En appliquant convenablement le théorème 2.13, on peut en déduire la régularité de  $\tilde{u}^0$  dans l'échelle des espaces à poids.

**Théorème 2.14** *Pour tout  $m \geq 0$ ,  $\tilde{u}^0 \in K_m^m(\tilde{Q})$ .*

DÉMONSTRATION. On va appliquer le théorème 2.13 pour la valeur  $\gamma = m$  du poids. La condition concernant  $\tilde{u}^0$  est réalisée :  $\tilde{u}^0 \in K_0^0(\tilde{Q})$ , d'après le lemme 2.12. Il reste à vérifier l'hypothèse sur le second membre.

Par construction (voir problème (2.15)), ce second membre est de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\text{int}} &= \alpha \tilde{\varphi}_{\text{int}}, \\ \tilde{f}_{\text{ext}} &= \zeta \tilde{\phi} + \tilde{\varphi}_{\text{ext}}, \\ \tilde{g} &= \zeta \tilde{\psi}, \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\varphi}$  à support dans la couronne  $[\log r_0 < t < \log r_1]$  et, si on a posé  $\check{\phi}(r, \theta) = \tilde{\phi}(t, \theta)$  et  $\check{\psi}(r, \theta) = \tilde{\psi}(t, \theta)$ ,

$$\begin{aligned} \check{\phi} &\in \mathfrak{S}^{\lambda-1}(\check{Q}_{\text{ext}}) \oplus \mathfrak{S}^{\lambda}(\check{Q}_{\text{ext}}) \\ \check{\psi} &\in \mathfrak{S}^{\lambda}(G) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \lambda = \Lambda - p - 1 < -1.$$

De manière immédiate,  $\tilde{\varphi} \in K_{m+m-2}^{m-2}(\tilde{Q})$ . D'autre part,

- Si  $p > \Lambda - 1 + m$ , alors  $\lambda < -m$  et le lemme 2.12 assure que  $\tilde{\phi} \in K_{m+m-2}^{m-2}(\tilde{Q}_{\text{ext}})$ .

De plus, par définition de  $\mathfrak{S}^{\lambda}(G)$ , il existe  $\tilde{\Psi} \in \mathfrak{S}^{\lambda}(\check{Q}_{\text{int}})$  tel que  $\tilde{\Psi}|_G = \tilde{\psi}$ .

Toujours d'après le lemme 2.12,  $\tilde{\Psi} \in K_m^{m-2}(\tilde{Q}_{\text{int}})$ . Il s'ensuit que  $\zeta \tilde{\psi} \in K_{m+\frac{1}{2}}^{m-\frac{3}{2}}(\tilde{G})$ .

Le théorème 2.13 permet de conclure que  $\tilde{\mathbf{u}}^0 \in K_m^m(\tilde{Q} \cap t > 0]$ .

- Si  $\Lambda - 1 \leq p \leq \Lambda - 1 + m$ , alors on écrit

$$\mathbf{u}^{\Lambda, p} = \mathbf{u}^{\Lambda, p+1+m} - \sum_{\ell=0}^m \mathfrak{K}^{\Lambda, \Lambda-p-\ell-1}.$$

Comme  $p + 1 + m > \Lambda - 1 + m$ ,  $\mathbf{u}^{\Lambda, p+1+m}$  est redevable du premier point :

$$\widetilde{\zeta \mathbf{u}}^{\Lambda, p+1+m} \in K_m^m(\tilde{Q} \cap [t > 0]).$$

Par ailleurs,  $\mathfrak{K}^{\Lambda, \Lambda-p-1-\ell}$  est une fonction de  $\mathfrak{V}$ , telle que  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-p-1-\ell} \in \mathfrak{S}^{\Lambda-p-1-\ell}$  ; le lemme 2.12 assure donc que  $\tilde{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-p-1-\ell} \in K_m^m(\tilde{Q} \cap [t > 0])$ . ■

**Remarque.** On a obtenu un résultat de régularité de la solution variationnelle en termes d’espaces à poids ; notons cependant que l’information ne concerne que la zone  $t > 0$  : on ne connaît rien au voisinage du coin.

## 2.7 Développement “sous-variationnel”

Dans le paragraphe 2.5, on a construit une solution au problème (2.13). La solution apparaît comme la somme d’un terme variationnel et d’un développement “sur-variationnel”. Ce dernier est constitué de termes provenant de la résolution des problèmes intérieur et extérieur (2.10) et (2.11).

Afin de compléter ce développement, on va maintenant préciser le comportement asymptotique (pour  $t$  grand) du terme variationnel  $\tilde{\mathbf{u}}^0$ .

### 2.7.1 La transformation de Mellin

L’objet de ce paragraphe est l’introduction de la *transformation de Mellin* : il s’agit d’une transformation de Fourier-Laplace dans la direction radiale. Elle va nous servir d’outil de base pour obtenir le développement asymptotique à l’infini de  $\tilde{\mathbf{u}}^0$ .

Pour une fonction  $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}$  définie sur  $\tilde{Q}_{\text{int}}$ , on définit la transformée de Mellin de  $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}$  par la formule suivante, quand elle a un sens :

$$(2.18) \quad \hat{\mathbf{u}}_{\text{int}}(\lambda, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}(t, \theta) dt, \quad \theta \in \Theta_{\text{int}} = (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}).$$

L’argument  $\lambda$  est complexe ; si on note  $\lambda = \xi + i\eta$ , alors  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{int}}$  apparaît comme la transformée de Fourier (en  $t$ ) de la fonction  $t \mapsto e^{-\xi t} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{int}}$ , évaluée en  $\eta$  ( $\xi$  est ici un paramètre).

De la même façon, on définit la transformée de Mellin de  $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{ext}}$  par

$$(2.19) \quad \hat{u}_{\text{ext}}^{\pm}(\lambda, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} \tilde{u}_{\text{ext}}(t, \theta) dt, \quad \theta \in \Theta_{\text{ext}}^{\pm} = \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1).$$

Le lemme suivant, qui découle du théorème de Plancherel, montre que la transformation de Mellin caractérise les espaces à poids. On note  $\hat{u}$  la fonction donnée par  $\hat{u}_{\text{int}}$  dans  $\Theta_{\text{int}}$  et par  $\hat{u}_{\text{ext}}^{\pm}$  dans  $\Theta_{\text{ext}}$  ; on note  $\Theta = \Theta_{\text{int}} \cup \Theta_{\text{ext}}^{\pm}$ .

**Lemme 2.15** *Soit  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ . On pose  $\xi = m - \gamma + \frac{1}{2}$ .*

(i) *Si  $u \in K_{\gamma}^m(\tilde{Q})$ , alors la transformée de Mellin  $\hat{u}$  de  $\tilde{u}$  est bien définie pour  $\text{Re } \lambda = \xi$  comme fonction de  $L^2$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $H^m(\Theta)$  :*

$$\eta \mapsto \hat{u}(\xi + i\eta, \cdot) \text{ est dans } L^2(\mathbb{R}, H^m(\Theta)).$$

Plus précisément, on a l'équivalence

$$\|\tilde{u}\|_{K_{\gamma}^m(\tilde{Q})} \simeq \left( \int_{\mathbb{R}} \|\hat{u}(\xi + i\eta)\|_{H^m(\Theta, |\eta|)}^2 d\eta \right)^{1/2},$$

où pour  $\rho > 0$ , la norme  $\|\mathbf{v}\|_{H^m(\Theta, \rho)}$  est la norme sur  $H^m(\Theta)$  définie par

$$\|\mathbf{v}\|_{H^m(\Theta, \rho)}^2 = \sum_{|\beta| \leq m} \left\| \rho^{\beta_1} \partial^{\beta'} \mathbf{v} \right\|_{L^2(\Theta)}^2, \quad \beta = (\beta_1, \beta').$$

(ii) *Réciproquement, si  $U(\lambda)$  est définie pour  $\text{Re } \lambda = \xi$  de façon que l'application  $(\eta, \theta) \mapsto U(\xi + i\eta, \theta)$  soit dans  $L^2(\mathbb{R}, H^m(\Theta))$  avec la condition*

$$\int_{\mathbb{R}} \|U(\xi + i\eta)\|_{H^m(\Theta, |\eta|)}^2 d\eta < \infty,$$

*alors pour tout  $\lambda$ ,  $\text{Re } \lambda = \xi$ ,  $U(\lambda)$  est la transformation de Mellin  $\hat{u}(\lambda)$  d'une fonction  $\tilde{u}_{\text{int}}$  de  $K_{\gamma}^m(\tilde{Q})$  ;  $\tilde{u}$  est reconstruit à partir de  $U$  par la formule*

$$\tilde{u}(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{(\xi + i\eta)t} U(\xi + i\eta, \theta) d\eta.$$

On verra dans le paragraphe suivant que la transformation de Mellin est un outil puissant pour résoudre le problème (2.10) posé dans  $\tilde{Q}_{\text{int}}$ .

### 2.7.2 Prolongement méromorphe du terme variationnel

On rappelle qu'on a noté  $\tilde{u}^0 = \zeta \tilde{u}^{\Lambda, p}$  où  $u^{\Lambda, p}$  est le terme variationnel du théorème 2.7, associé aux données  $\mathfrak{f}_{\text{int}}, \mathfrak{f}_{\text{ext}}, \mathfrak{g}$ . Le lemme 2.17 ci-dessous précise les propriétés de la transformée de Mellin de ce second membre.

**Définition 2.16** *Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $\lambda_i = \Lambda - p - i$ , où  $\Lambda = \frac{k\pi}{\omega}$  est défini au théorème 2.7.*

**Lemme 2.17** *Les transformées de Mellin de  $\tilde{f}_{\text{int}}, \tilde{f}_{\text{ext}}$  et  $\tilde{g}$  admettent un prolongement méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$  ( $\tilde{f}_{\text{int}}$  se prolonge même de façon holomorphe sur  $\mathbb{C}$ ).*

DÉMONSTRATION. D'après le problème (2.15), le second membre vérifie

$$\tilde{f} = \mathbb{I}_{[t > r_1]}(\tilde{f}^{-1} + \tilde{f}^{-2}) + \tilde{f}^c \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \mathbb{I}_{[t > r_1]}\tilde{g}^{-1} + \tilde{g}^c,$$

avec  $\check{f}^{-i} \in (\mathfrak{S}^{\lambda_i}(\check{Q}_{\text{ext}}))$ ,  $\check{g}^{-1} \in \mathfrak{S}^{\lambda_1}(G)$  et  $\tilde{f}^c$  et  $\tilde{g}^c$  sont à support compact.

D'autre part, on peut obtenir une formule explicite pour les transformées de Mellin des fonctions de  $\mathbb{I}_{[r > r_1]}\mathfrak{S}^\mu$ . En effet, soit  $\varphi$  un élément de cet ensemble. Alors on peut écrire  $\varphi$  sous la forme

$$\varphi(r, \theta) = \mathbb{I}_{[r > r_1]} r^\mu \sum_{\ell=0}^N \psi_\ell(s) \log^\ell \frac{r}{r_1}.$$

On note  $\tilde{\varphi}$  la fonction en les variables  $t, \theta$ . Pour  $\text{Re } \mu < \text{Re } \lambda$ , sa transformée de Mellin est donnée par la formule

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \sum_{\ell=0}^N \psi_\ell(s) \int_{\log r_1}^{+\infty} e^{t(\lambda-\mu)} (t - \log r_1)^\ell dt.$$

Par récurrence, on montre que, pour  $\text{Re } \mu < \text{Re } \lambda$ ,

$$\int_{\log r_1}^{+\infty} e^{-t(\lambda-\mu)} (t - \log r_1)^\ell dt = \frac{\ell!}{(\lambda - \mu)^{\ell+1}} r_1^{\mu-\lambda}.$$

On en déduit que pour  $\text{Re } \mu > \text{Re } \lambda$ ,

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \sum_{\ell=0}^N \psi_\ell(s) \frac{(-1)^{\ell+1} \ell!}{(\lambda - \mu)^{\ell+1}} r_1^{\lambda-\mu},$$

ce qui fournit un prolongement méromorphe de  $\hat{\varphi}$  sur  $\mathbb{C}$ , holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{\mu\}$ .

Par ailleurs, les transformées de Mellin de  $\tilde{f}^c$  et  $\tilde{g}^c$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ , ce qui achève la preuve du lemme. ■

Dans toute la suite, on notera  $\Pi_a = \{\lambda / \text{Re } \lambda > a\}$ .

**Lemme 2.18** *La transformée de Mellin  $\kappa = \hat{u}^0$  du terme variationnel  $\tilde{u}^0$  est holomorphe dans  $\Pi_{\frac{1}{2}}$ .*

DÉMONSTRATION. D’après le lemme 2.12,  $\tilde{u}^0 \in K_0^0(\tilde{Q})$ . Le lemme 2.15 assure donc que sa transformée de Mellin est définie pour  $\text{Re } \lambda = \frac{1}{2}$ . Comme la fonction  $\tilde{u}^0$  est nulle au voisinage de  $t = -\infty$ , alors  $\kappa = \hat{u}_0^p$  est définie pour  $\text{Re } \lambda \geq \frac{1}{2}$ . La caractère holomorphe se déduit immédiatement de la formule qui définit la transformée de Mellin. ■

Après transformation de Mellin – à la fois dans  $\tilde{Q}_{\text{int}}$  et  $\tilde{Q}_{\text{ext}}$  – le problème vérifié par  $\tilde{u}^0$  devient (voir (2.16)).

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda^2 + \partial_\theta^2) \kappa_{\text{int}}(\lambda) = \hat{f}_{\text{int}}(\lambda - 2) & \theta \in (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}), \\ \kappa_{\text{int}}(\lambda) = \kappa_{\text{ext}}^\pm(\lambda) & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \partial_\theta^2 \kappa_{\text{ext}}^-(\lambda) = \hat{f}_{\text{ext}}^-(\lambda) - \lambda(\lambda - 1) \kappa_{\text{ext}}^-(\lambda + 2) & \theta \in (-\frac{\omega}{2} - 1, -\frac{\omega}{2}), \\ \partial_\theta \kappa_{\text{ext}}^-(\lambda) = \alpha \partial_\theta \kappa_{\text{int}}(\lambda + 1) - \hat{g}^-(\lambda) & \theta = -\frac{\omega}{2}, \\ \kappa_{\text{ext}}^-(\lambda) = 0 & \theta = -\frac{\omega}{2} - 1, \\ \partial_\theta^2 \kappa_{\text{ext}}^+(\lambda) = \hat{f}_{\text{ext}}^+(\lambda) - \lambda(\lambda - 1) \kappa_{\text{ext}}^+(\lambda + 2) & \theta \in (\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \kappa_{\text{ext}}^+(\lambda) = \alpha \partial_\theta \kappa_{\text{int}}(\lambda + 1) - \hat{g}^+(\lambda) & \theta = \frac{\omega}{2}, \\ \kappa_{\text{ext}}^+(\lambda) = 0 & \theta = \frac{\omega}{2} + 1. \end{array} \right.$$

**Remarque.** Comme dans la construction du développement sur-variationnel, un décalage se produit dans la condition de transmission des dérivées normales. Ici, il porte sur  $\lambda$ , qui est la variable duale de  $t$ . Encore une fois ce décalage constitue l’argument-clé par la suite.

On va maintenant déterminer une extension méromorphe de  $\kappa$  sur  $\mathbb{C}$ . On pourra ensuite, par transformation de Mellin inverse, obtenir le développement asymptotique de  $\tilde{u}^0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Comme au paragraphe 2.5, on travaillera successivement dans  $\tilde{Q}_{\text{int}}$  et  $\tilde{Q}_{\text{ext}}$ . Les problèmes qui vont nous intéresser seront donc de la forme

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda^2 + \partial_\theta^2) W(\lambda) = \varphi(\lambda) & \theta \in \Theta_{\text{int}}, \\ W(\lambda) = \sigma^-(\lambda) & \theta = -\frac{\omega}{2}, \\ W(\lambda) = \sigma^+(\lambda) & \theta = \frac{\omega}{2}, \end{array} \right.$$

et

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \partial_\theta^2 W(\lambda) = \phi(\lambda) & \theta \in \Theta_{\text{ext}}, \\ \partial_\theta W(\lambda) = v(\lambda) & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ W(\lambda) = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{array} \right.$$

( $\lambda$  est un paramètre). Le lemme qui suit précise les espaces dans lesquels ces problèmes sont bien posés.

**Lemme 2.19**

(i) Si  $\varphi(\lambda) \in L^2(\Theta_{\text{int}})$  et  $\lambda \notin \frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}^*$  (i.e.  $\lambda$  n'est pas un exposant singulier du problème de Dirichlet dans  $Q_{\text{int}}$ ), alors il existe une unique solution  $W(\lambda) \in H^2(\Theta_{\text{int}})$  au problème (2.21).

On définit l'opérateur

$$R_{\text{int}}(\lambda) : \begin{array}{ccc} L^2(\Theta_{\text{int}}) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & H^2(\Theta_{\text{int}}) \\ (\varphi, \sigma^-, \sigma^+) & \longmapsto & W_{\text{int}}. \end{array}$$

Si  $\lambda \mapsto (\varphi(\lambda), \sigma^-(\lambda), \sigma^+(\lambda))$  est méromorphe dans  $\Pi \subset \mathbb{C}$ , alors  $\lambda \mapsto W_{\text{int}}(\lambda)$  est méromorphe dans  $\Pi$ , les pôles étant ceux du second membre et  $\frac{\pi}{\omega}\mathbb{Z}^*$ .

(ii) Si  $\phi^\pm(\lambda) \in L^2(\Theta_{\text{ext}}^\pm)$ , alors il existe une unique solution  $W(\lambda) \in H^2(\Theta_{\text{ext}}^\pm)$  au problème (2.22). On note  $R_{\text{ext}}$  l'opérateur  $(\phi, \theta) \mapsto W$  :

$$R_{\text{ext}}(\phi, v)(\theta) = - \int_{\theta}^{\sigma(\frac{\omega}{2}+1)} \left( v + \int_{\sigma\frac{\omega}{2}}^u \phi(y) dy \right) du \quad \text{avec } \sigma = \text{signe}(\theta) ;$$

Si  $\lambda \mapsto (\phi(\lambda), v(\lambda))$  sont méromorphes dans  $\Pi$ , il en est de même de  $W(\lambda)$ , les pôles restant les mêmes.

DÉMONSTRATION. Pour la partie (i), on utilise la méthode de variations des constantes, La partie (ii) se traite explicitement. ■

On peut maintenant énoncer le résultat central du paragraphe :

**Théorème 2.20** On se place dans le cadre développé précédemment :  $\kappa$  désigne la transformée de Mellin du terme variationnel  $\tilde{u}^0 = \zeta \tilde{u}^{\Lambda, p}$ . La fonction  $\kappa$  se prolonge à  $\mathbb{C}$  de façon méromorphe ; l'ensemble des pôles est contenu dans  $\Omega_p^\Lambda \cup \Omega^-$  où

$$\Omega_p^\Lambda = \{ \Lambda - q \mid q \in \mathbb{N}, q > p \} \quad \text{et} \quad \Omega^- = \left\{ -\frac{h\pi}{\omega} - q \mid h, q \in \mathbb{N} \text{ avec } h > 0 \right\}.$$

DÉMONSTRATION.

**Étape 1.** On définit  $W_{\text{ext}}(\lambda)$  par

$$W_{\text{ext}}^\pm(\lambda) = R_{\text{ext}} \left[ \hat{f}_{\text{ext}}^\pm(\lambda) - \lambda(\lambda - 1) \kappa_{\text{ext}}^\pm(\lambda + 2), \alpha \partial_\theta \kappa_{\text{int}}(\lambda + 1) |_{\theta=\pm\frac{\omega}{2}} - \hat{g}^\pm(\lambda) \right]$$



Le second membre de cette égalité est méromorphe dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$  d’après les lemmes 2.17 et 2.18. D’après le lemme 2.19,  $W_{\text{ext}}$  est aussi méromorphe dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ .

On considère alors  $W_{\text{int}}$  :

$$W_{\text{int}}(\lambda) = R_{\text{int}}(\lambda) \left[ \hat{f}_{\text{int}}(\lambda - 2), W_{\text{ext}}^-(\lambda), W_{\text{ext}}^+(\lambda) \right]$$

Ici encore, le second membre est méromorphe dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ , donc  $W_{\text{int}}$  est méromorphe dans  $\Pi_{\frac{1}{2}}$  (les pôles  $\frac{k\pi}{\omega}$  proviennent de  $R_{\text{int}}$ ). Ainsi  $W$  défini par  $W_{\text{int}}$  dans  $\Theta_{\text{int}}$  et par  $W_{\text{ext}}$  dans  $\Theta_{\text{ext}}$  est méromorphe dans l’ensemble  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$ .

En vertu des équations (2.20)  $\kappa$  vérifie, dans  $\Pi_{\frac{1}{2}}$ , les mêmes égalités que  $W$ . D’après l’unicité dans le lemme 2.19,  $W$  et  $\kappa$  coïncident dans  $\Pi_{\frac{1}{2}} \setminus \frac{\pi}{\omega} \mathbb{Z}^*$ . On en déduit que les pôles  $\frac{k\pi}{\omega}$  qui sont apparus dans  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$  sont artificiels (puisqu’ils n’existaient pas pour  $\kappa$ ). En revanche les pôles de  $\frac{\pi}{\omega} \mathbb{Z}^* \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  doivent être pris en compte.

Il s’ensuit que  $W$  est le prolongement méromorphe de  $\kappa$  à  $\Pi_{-\frac{1}{2}}$  (les pôles sont les éléments de  $(\Omega_p^\Lambda \cup \Omega^-)$  situés dans l’intervalle  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ). On notera encore  $\kappa$  cette extension.

**Étape  $j$ .** L’algorithme se poursuit par récurrence, le second membre étant défini à chaque étape dans un domaine plus grand qu’à l’étape précédente ; les formules sont les mêmes. Remarquons que les pôles apparaissent de deux façons différentes : d’une part par translation d’une et deux unités des pôles existant à l’étape précédente (cela est dû aux décalages dans les seconds membres) et d’autre part à cause de l’opérateur  $R_{\text{int}}$  (ce dernier introduit les pôles  $\frac{\pi}{\omega} \mathbb{Z}^*$ ).

À chaque étape intervient un décalage de deux unités des pôles existant à l’étape précédente et de nouveaux pôles apparaissent :

$$\frac{\pi}{\omega} \mathbb{Z}^* \cap (-j + \frac{1}{2}, -j + \frac{3}{2}]$$

si bien que le prolongement méromorphe dans  $\mathbb{C}$  possède comme pôles les éléments de  $(\Omega_p^\Lambda \cup \Omega^-) \cap (-\infty, 0)$ . ■

Par définition, la fonction  $\kappa$  est la transformée de Mellin de la fonction  $\tilde{u}^0$  pour  $\text{Re } \lambda > 0$ , qui est régulière :  $\tilde{u}^0 \in K_m^m(\tilde{Q})$  pour tout  $m$  d’après le théorème 2.14. Le lemme qui suit montre que ce résultat persiste pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , ce qui constitue l’élément essentiel des estimations du paragraphe suivant.

**Lemme 2.21** *Soit  $a \in \mathbb{R}^+$ . Il existe une fonction  $\tilde{u}^a$  telle que*

- $\tilde{u}^a \in K_{m+a}^m(\tilde{Q})$  pour tout entier  $m$  ;
- $\kappa$  est la transformée de Mellin de  $\tilde{u}^a$  pour tout  $\lambda$  tel que  $\text{Re } \lambda > a$ .

**DÉMONSTRATION.** On procède par récurrence descendante sur  $[a]$ , partie entière de  $a$ .

- Si  $\lfloor a \rfloor = 0$ , alors  $\kappa$  est la transformée de Mellin du terme variationnel  $\tilde{u}^0$  dont on a montré au théorème 2.14 qu'il appartenait à l'espace à poids  $K_m^m(\tilde{Q})$  pour tout entier  $m$ .
- Supposons le résultat acquis pour  $\lfloor a \rfloor > -q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ). Soit alors  $a \in [-q-1, -q)$ . D'après le lemme 2.15, il s'agit de vérifier, pour  $\xi > a$ , la condition

$$I_m(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \|\kappa(\xi + i\eta)\|_{H^m(\Theta, |\eta|)}^2 d\eta < \infty.$$

Or la construction de la fonction  $\kappa$  montre que (voir la démonstration du théorème 2.20)

$$\begin{aligned} \|\kappa_{\text{ext}}(\lambda)\|_{H^m(\Theta_{\text{ext}}, |\eta|)} &\leq C \left[ \left\| \hat{f}_{\text{ext}}(\lambda) \right\|_{H^m(\Theta_{\text{ext}}, |\eta|)} + |\eta|^m |\hat{g}(\lambda)| + \|\kappa_{\text{int}}(\lambda + 1)\|_{H^{m+2}(\Theta_{\text{int}}, |\eta|)} \right. \\ &\quad \left. + \|\lambda(\lambda - 1)\kappa_{\text{ext}}(\lambda + 2)\|_{H^{m+2}(\Theta_{\text{ext}}, |\eta|)} \right]. \end{aligned}$$

On peut majorer le terme  $\|\lambda(\lambda - 1)\kappa_{\text{ext}}(\lambda + 2)\|_{H^{m+2}(\Theta_{\text{ext}}, |\eta|)}$  par

$$\|\kappa_{\text{ext}}(\lambda + 2)\|_{H^{m+4}(\Theta_{\text{ext}}, |\eta|)}.$$

Ainsi, en intégrant par rapport à  $\eta \in \mathbb{R}$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_m(\xi) &\leq C \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \left\| \hat{f}_{\text{ext}}(\lambda) \right\|_{H^m(\Theta_{\text{ext}}, |\eta|)}^2 + |\eta|^{2m} |\hat{g}(\lambda)|^2 \right) d\eta + I_{m+2}(\xi + 1) + I_{m+4}(\xi + 2) \right] \\ &\leq C \left[ \left\| \tilde{f}_{\text{ext}} \right\|_{K_{m+a}^m(\tilde{Q}_{\text{ext}})}^2 + \|\tilde{g}\|_{K_{m+a}^m(G)}^2 + I_{m+2}(\xi + 1) + I_{m+4}(\xi + 2) \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que les quantités  $I_{m+2}(\xi + 1)$  et  $I_{m+4}(\xi + 2)$  sont finies. D'autre part, d'après le théorème 2.14,  $\tilde{u}^0$  appartient à l'espace à poids  $K_{m+2}^{m+2}(\tilde{Q})$  donc

$$\tilde{f}_{\text{ext}} \in K_{m+2}^m(\tilde{Q}_{\text{ext}}) \subset K_{m+a}^m(\tilde{Q}_{\text{ext}}).$$

Le raisonnement est similaire pour la partie concernant  $\mathbf{g}$ . On en déduit que  $I_m(\xi)$  est finie, ce qui achève la preuve par récurrence.  $\blacksquare$

### 2.7.3 Développement asymptotique du terme variationnel

Partant de l'étude de la transformée de Mellin  $\kappa$  du terme variationnel  $\tilde{u}^0$ , établie au paragraphe précédent, on va maintenant, grâce à la transformation de Mellin inverse, obtenir des renseignements sur  $\tilde{u}^0$  lui-même, ou de manière équivalente sur  $\mathbf{u}^0 = \zeta \mathbf{u}^{\Lambda, p}$ .

#### Théorème 2.22

(i) Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Il existe des fonctions  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \mu} \in \mathfrak{S}^\mu(\check{Q})$  telles que

$$\zeta u^{\Lambda, p} = \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_p^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^- \\ -j \leq \mu}} \mathcal{F}^*(\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \mu}) + \mathfrak{q}_j,$$

avec  $\mathfrak{q}_j \in K_{m+j+\delta}^m(Q)$ , pour un  $\delta > 0$  et tout entier  $m$ .

(ii) Les termes  $\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \mu}$  pour  $\mu \in \mathfrak{Q}_p^\Lambda$  peuvent être choisis indépendamment de l'entier  $p$ , ce qu'on suppose pour la suite ; ils sont construits par récurrence à l'aide des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_\theta^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = -\partial_r^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu+2} & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu+1} & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \check{\Delta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. On utilise ici une technique de calcul de résidus, méthode classique dans la théorie des problèmes elliptiques en domaines non réguliers.

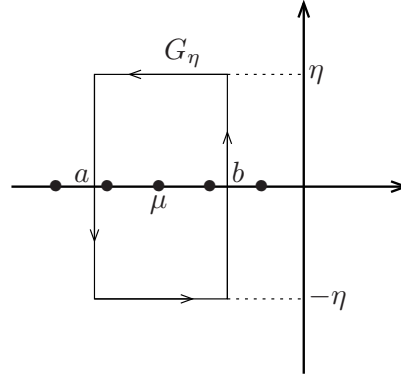
Soient  $a, b \notin \mathfrak{Q}_p^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^-$ ,  $a < b$  et  $\eta > 0$ . On note  $G_\eta$  le contour du rectangle

$$a < \text{Re } \lambda < b \quad \text{et} \quad |\text{Im } \lambda| < \eta.$$

La formule des résidus donne

$$\int_{G_\eta} e^{t\lambda} \kappa(\lambda) \, d\lambda = 2i\pi \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_p^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^- \\ a < \mu < b}} \text{Res}_{\lambda=\mu} e^{t\lambda} \kappa(\lambda).$$

Lorsque  $\eta$  tend vers l'infini, des transformées de Mellin inverses apparaissent.



Pour les côtés verticaux, on a :

$$\int_{-\eta}^{\eta} e^{(\gamma+i\eta)t} \kappa(\gamma + i\eta) i \, d\eta \longrightarrow 2i\pi \mathcal{M}_\gamma^{-1}[\kappa(\lambda)], \quad \gamma = a, b,$$

où  $\mathcal{M}_\gamma^{-1}(\varphi)$  désigne la transformée de Mellin inverse de la fonction  $\varphi$  le long de la droite  $\text{Re } \lambda = \gamma$ . En effet, d'après le lemme 2.21,  $\kappa$  est la transformée de Mellin d'une fonction le long de toute droite verticale.

D'autre part, les côtés horizontaux ne comptent pas : il existe une suite  $\eta_k \rightarrow +\infty$  telle que

$$I(\eta_k) = \int_a^b e^{t(\xi \pm i\eta_k)} \kappa(\xi \pm i\eta_k) d\xi \longrightarrow 0.$$

En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} |I(\eta)|^2 d\eta \leq C \int_a^b \int_{\mathbb{R}} |\kappa(\xi + i\eta)|^2 d\eta < +\infty,$$

d'après le lemme 2.21.

On obtient ainsi la formule

$$\mathcal{M}_b^{-1}[\kappa(\lambda)] - \mathcal{M}_a^{-1}[\kappa(\lambda)] = \sum_{a < \mu \in \mathfrak{Q}_p^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^- < b} \operatorname{Res}_{\lambda=\mu} e^{t\lambda} \kappa(\lambda).$$

Il suffit ensuite de remarquer que, si on note  $\tilde{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \mu} = \operatorname{Res}_{\lambda=\mu} e^{t\lambda} \kappa(\lambda)$ , alors

$$\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \mu} \in \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}).$$

En effet, le développement de  $\kappa$  en série de Laurent s'écrit

$$\kappa(\lambda) = F(\lambda) + \sum_{p=1}^P \frac{A_p}{(\lambda - \mu)^p}, \quad F \text{ holomorphe en } \mu.$$

De plus

$$r^\lambda = r^\mu \sum_{\ell \geq 0} \frac{\log^\ell r}{\ell!} (\lambda - \mu)^\ell.$$

Le résidu de  $e^{t\lambda} \kappa(\lambda)$  en  $\lambda = \mu$  est le terme d'ordre  $-1$  dans son développement de Laurent, donc égal à

$$r^\mu \sum_{\ell-p=-1} \frac{\log^\ell r}{\ell!} A_p \in \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}).$$

La première partie du théorème s'en déduit par application du lemme 2.21 pour  $b = 0$  et  $a = -j - \delta$  tel que  $-j - \delta \notin \mathfrak{Q}_p^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^-$ .

Intéressons-nous maintenant à (ii). Fixons  $p = \lfloor \Lambda \rfloor$ , partie entière de  $\Lambda$  et notons  $a^\pm = \Lambda - p - 1 \pm \delta$ . Si  $\delta$  est choisi assez petit, alors  $\Lambda - p - 1$  est le seul pôle dans l'intervalle  $(a^-, a^+)$ . On en déduit que, avec les notations du lemme 2.21,

$$\tilde{u}^{a^+} - \tilde{u}^{a^-} = \tilde{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \Lambda-p-1}.$$

Par transformation de Mellin inverse dans le problème (2.20) le long des droites  $\operatorname{Re} \lambda = a^\pm$  et par différence, on obtient dans les variables  $(r, \theta)$ , après avoir noté  $\check{f}^{a^\pm}$  et  $\check{g}^{a^\pm}$  les transformées de Mellin inverses respectives de  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  le long des droites  $\operatorname{Re} \lambda = a^\pm$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_\theta^2 \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} = (\check{f}_{\text{ext}}^{a^+} - \check{f}_{\text{ext}}^{a^-}) - \partial_r^2 (\check{u}_{\text{ext}}^{a^++2} - \check{u}_{\text{ext}}^{a^-+2}) & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta (\check{u}_{\text{int}}^{a^++1} - \check{u}_{\text{int}}^{a^-+1}) - (\check{g}^{a^+} - \check{g}^{a^-}) & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \check{\Delta} \check{\mathcal{R}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} = \check{f}_{\text{int}}^{a^+} - \check{f}_{\text{int}}^{a^-} & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathcal{R}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} = \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-p-1} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{array} \right.$$

D'après le lemme 2.18,  $\kappa$  ne comporte pas de pôle dans les intervalles  $(a^- + 1, a^+ + 1)$  et  $(a^- + 2, a^+ + 2)$ , qui sont inclus dans  $\mathbb{R}^+$  car  $\Lambda - p \geq 0$ . Ainsi, on a les égalités suivantes

$$\check{u}_{\text{ext}}^{a^++2} = \check{u}_{\text{ext}}^{a^-+2} \quad \text{et} \quad \check{u}_{\text{int}}^{a^++1} = \check{u}_{\text{int}}^{a^-+1}.$$

De la même façon, puisque  $\hat{f}_{\text{int}}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , on a aussi  $\check{f}_{\text{int}}^{a^+} = \check{f}_{\text{int}}^{a^-}$ . En revanche,  $\hat{f}_{\text{ext}}$  comporte un pôle en  $\Lambda - p - 1$  (cf. lemme 2.17), provenant de la fonction  $-\partial_r^2 \check{\mathcal{R}}^{\Lambda, \Lambda-p+1}$ , voir problème (2.15) :

$$\check{f}_{\text{ext}}^{a^+} - \check{f}_{\text{ext}}^{a^-} = -\partial_r^2 \check{\mathcal{R}}^{\Lambda, \Lambda-p+1}.$$

De façon similaire,

$$\check{g}^{a^+} - \check{g}^{a^-} = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathcal{R}}^{\Lambda, \Lambda-p}.$$

On en déduit les problèmes suivants, pour  $\mu = \Lambda - p - 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_\theta^2 \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = -\partial_r^2 \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu+2} & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathcal{R}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu+1} & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \check{\Delta} \check{\mathcal{R}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathcal{R}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = \check{\mathcal{R}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{array} \right.$$

On procède ensuite par récurrence sur  $p$  pour obtenir le résultat pour tout  $\mu$ . ■

**Remarque.** Le développement sous-variationnel obtenu dans le théorème 2.22 comporte deux types de pôles. Ceux qui correspondent à l'ensemble  $\mathfrak{Q}_p^\Lambda$  sont déterminées à l'aide du même procédé constructif que le développement sur-variationnel. En revanche, les pôles qui apparaissent à cause du noyau du symbole Mellin intérieur ne sont pas définis de manière algorithmique : ils contiennent l'information globale de la résolution variationnelle. Notons enfin que les deux familles de pôles ne sont pas disjointes si  $\frac{\pi}{\omega}$  est rationnel.

## 2.8 Conclusion

### 2.8.1 Problème homogène

En combinant les théorèmes 2.7 et 2.22, on obtient un développement complet pour une solution au problème (2.1), qu'on rappelle ici :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathbf{u}_{\text{ext}} = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \alpha \Delta \mathbf{u}_{\text{int}} = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_{\text{ext}} = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathbf{u}_{\text{int}} = \mathbf{u}_{\text{ext}} & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathbf{u}_{\text{int}} = \partial_n \mathbf{u}_{\text{ext}} & \text{sur } G, \\ \mathbf{u}_{\text{int}} \sim \mathfrak{s}^\Lambda & \text{quand } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

L'ensemble des pôles  $\mathfrak{Q}_0^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^-$  est donné par

$$\mathfrak{Q}_0^\Lambda = \{\Lambda - q \mid q \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q}^- = \left\{ -\frac{h\pi}{\omega} - q \mid h, q \in \mathbb{N} \text{ avec } h > 0 \right\}.$$

On rappelle aussi la définition de l'espace  $\mathfrak{S}^\mu(\check{Q})$  :

$$\check{\mathbf{v}} \in \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}) \quad \text{ssi} \quad \check{\mathbf{v}}_{\text{int}} = r^\mu \sum_{\ell=0}^N \log^\ell r v_\ell(\theta) \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{v}}_{\text{ext}} = \sum_{j=0}^J \theta^j \psi_j^\pm(r),$$

avec  $\check{\mathbf{u}}_{\text{int}}|_G = \check{\mathbf{u}}_{\text{ext}}|_G$ . Les fonctions  $v_\ell$  sont régulières et  $\psi_j^\pm$  sont de la forme

$$\psi_j^\pm = r^\mu \sum_{\ell=1}^N c_j^\pm \log^\ell r \quad (c_j^+, c_j^- \in \mathbb{R}).$$

Enfin, l'opérateur  $\mathcal{F}^*$  transporte les fonctions définies sur la demi-bande “polaire”  $\check{Q} = (0, +\infty) \times (-\frac{\omega}{2} - 1, \frac{\omega}{2} + 1)$  – dans lequel les variables sont  $(r, \theta)$  – sur le domaine cartésien  $Q$  d'origine (voir définition 2.3).

**Théorème 2.23** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Lambda = \frac{k\pi}{\omega}$ . Il existe  $\mathfrak{K}^\Lambda$  solution du problème (2.1) ci-dessus et des fonctions  $\mathfrak{K}^{\Lambda, \mu} \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}) \right)$  telles que*

$$\mathfrak{K}^\Lambda = \mathfrak{s}_0^\Lambda + \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_0^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^- \\ -P \leq \mu < \Lambda}} \mathfrak{K}^{\Lambda, \mu} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{r^P} \right) \quad (\forall P \in \mathbb{N}).$$

En outre, pour  $\mu \in \Omega_0^\Lambda$  les termes  $\mathfrak{K}^{\Lambda, \mu} = \mathcal{F}^*(\check{\mathfrak{K}}^{\Lambda, \mu})$  sont construits comme suit :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \partial_\theta^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = -\partial_r^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu+2} & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = \frac{\alpha}{r} \partial_\theta \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu+1} & \theta = \pm \frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \theta = \pm \frac{\omega}{2} \pm 1, \end{cases}$$

et

$$(2.24) \quad \begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

### 2.8.2 Problème avec second membre

Les techniques utilisées dans ce chapitre permettent d'obtenir un résultat similaire dans le cas d'un problème avec second membre structuré : soit le problème

$$(2.25) \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{u}_{\text{ext}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \alpha \Delta \mathbf{u}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{int}} & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_{\text{ext}} = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathbf{u}_{\text{int}} = \mathbf{u}_{\text{ext}} & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathbf{u}_{\text{int}} = \partial_n \mathbf{u}_{\text{ext}} + \mathbf{g} & \text{sur } G, \end{cases}$$

**Théorème 2.24** Si les termes  $\mathbf{f}_{\text{int}}, \mathbf{f}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{g}$  vérifient

$$\mathbf{f}_{\text{int}} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^{\Lambda-2}(\check{Q}_{\text{int}})), \quad \mathbf{f}_{\text{ext}} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^{\Lambda-2}(\check{Q}_{\text{ext}})) \quad \text{et} \quad \mathbf{g} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^{\Lambda-1}(G)),$$

alors il existe une solution  $\mathfrak{W}$  au problème (2.25) et des fonctions  $\mathfrak{W}^\mu \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^\mu(\check{Q}))$  telles que

$$\mathfrak{W} = \sum_{\substack{\mu \in \Omega_0^\Lambda \cup \Omega^- \\ -P \leq \mu \leq \Lambda}} \mathfrak{W}^\mu + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^P}\right) \quad (\forall P \in \mathbb{N}).$$

Dans le chapitre suivant, on utilisera un cas particulier du résultat précédent, où les seconds membres proviennent d'un développement de Taylor au coin.

**Corollaire 2.25** Soit  $\Lambda \in \mathbb{N}$  et  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$  un bi-indice tel que

$$|\beta| = \beta_1 + \beta_2 = \Lambda - 2.$$

Il existe une fonction  $\mathfrak{W}^\beta$  solution du problème suivant

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \alpha \Delta \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta = r^{\Lambda-2} \cos^{\beta_1} \theta \sin^{\beta_2} \theta & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta = \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta = \partial_n \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta & \text{sur } G. \end{array} \right.$$

De plus, il existe des fonctions  $\mathfrak{W}^{\beta,\mu} \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}) \right)$  telles que

$$\mathfrak{W}^\beta = \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_0^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^- \\ -P \leq \mu \leq \Lambda}} \mathfrak{W}^{\beta,\mu} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{r^P} \right) \quad (\forall P \in \mathbb{N}).$$





## Chapitre 3

# Développement asymptotique dans un domaine à coin

### 3.1 Le problème

On considère un domaine borné et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega_{\text{int}}$  dont le bord  $\Gamma$  est supposé  $\mathcal{C}^\infty$  sauf en un point  $O_{\text{int}}$ . Au voisinage de ce point,  $\Omega_{\text{int}}$  coïncide avec un secteur angulaire d'ouverture  $\omega$ . On exclut le cas des fissures ( $\omega \neq 0, 2\pi$ ) et l'absence de coin dans le domaine ( $\omega \neq \pi$ ).

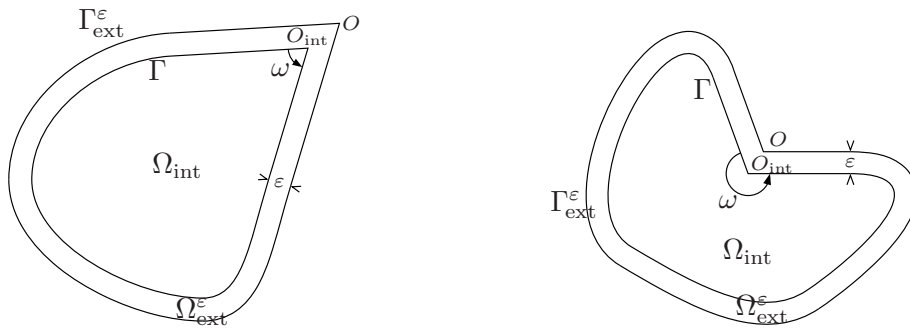


FIG. 3.1 – Le domaine  $\Omega^\varepsilon$  (cas convexe et concave).

Pour  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , assez petit, le domaine  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  est une couche mince uniforme autour de  $\Omega_{\text{int}}$ . À proximité du coin, le bord  $\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$  de  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  est composé de deux demi-droites ; dans la partie régulière,  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  provient d'une dilatation uniforme dans la direction normale :  $\{x + s\vec{n}(x) \mid x \in \Gamma \text{ et } 0 < s < \varepsilon\}$ . Le paramètre  $\varepsilon$  est destiné à tendre vers 0.

On s'intéresse au problème de transmission (1.1), posé dans  $\Omega^\varepsilon = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma \cup \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ , que l'on rappelle ici :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon = f_{\text{ext}} & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon + g & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Par la suite on adoptera la notation : pour une fonction  $v$  définie dans  $\Omega^\varepsilon$ ,  $v_{\text{int}}$  et  $v_{\text{ext}}$  désigneront les restrictions de  $v$  à  $\Omega_{\text{int}}$  et  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ , respectivement. On suppose que  $\alpha$  est un réel strictement positif si bien que (3.1) est un problème elliptique bien posé. En outre on peut obtenir une estimation a priori indépendante de  $\varepsilon$  :

**Proposition 3.1** *Si  $f \in L^2(\Omega^\varepsilon)$  et  $g \in L^2(\Gamma)$ , le problème (3.1) admet une unique solution  $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ . De plus, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon < \varepsilon_0$  telle que*

$$(3.2) \quad \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq C \left( \|f\|_{0,\Omega^\varepsilon} + \|g\|_{0,\Gamma} \right).$$

DÉMONSTRATION. La preuve a déjà été faite au chapitre 1 (voir proposition 1.1). ■

Le but de ce chapitre est d'obtenir un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (3.1) quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0. Pour cela, on va essayer d'employer la technique du chapitre 1, utilisée dans le cas où la géométrie est régulière ; la méthode était basée sur un changement d'échelle dans la couche mince.

La démarche qui suit est inspirée de [6], [16] et [11].

## 3.2 Écriture du problème sur un domaine fixe

### 3.2.1 Représentation tensorielle de la couche mince

Dans le cas où  $\Gamma$  est régulier, on peut représenter la couche mince  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  sous la forme  $\Gamma \times (0, \varepsilon)$  via l'utilisation des coordonnées locales dans le repère de Frénet. Cette méthode ne s'applique pas telle quelle dans notre situation à cause de la présence d'un coin dans le domaine.

On note  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires centrées en  $O_{\text{int}}$  ( $-\frac{\omega}{2} < \theta < \frac{\omega}{2}$ ) et on suppose que  $\Omega_{\text{int}}$  coïncide avec un secteur angulaire pour  $r < r_1$ . Pour  $x \in \Gamma$ , on note  $\vec{t}(x)$  la tangente unitaire à  $\Gamma$  en  $x$  et  $\vec{n}(x)$  la normale unitaire extérieure à  $\Gamma$ .

Soit  $r_0 < r_1$ , On définit alors le champ de vecteurs *non unitaire*  $\vec{\nu}(x)$  par

$$\vec{\nu}(x) = \begin{cases} \vec{u} & \text{si } r < r_0, \\ \vec{n}(x) & \text{si } r > r_1, \\ (1 - \gamma_r)\vec{n}(x) + \gamma_r\vec{u} & \text{si } r_0 < r < r_1, \end{cases}$$

où

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{O_{\text{int}}O}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \gamma_r = \frac{r - r_0}{r_1 - r_0}.$$

Les figures 3.2 et 3.3 illustrent l'évolution de la direction du vecteur  $\vec{\nu}(x)$  quand  $x$  décrit la courbe  $\Gamma$ . Tout point  $x_{\text{ext}}$  de  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  admet une représentation unique

$$x_{\text{ext}} = x + s\vec{\nu} \quad \text{avec} \quad x \in \Gamma \quad \text{et} \quad s \in (0, \varepsilon).$$

Si on note  $t$  l'abscisse curviligne sur  $\Gamma$  en  $x$ , on peut définir un système de coordonnées locales dans  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  :

$$\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon = \left\{ (t, s) \mid 0 \leq t < \ell_\Gamma \quad \text{et} \quad 0 < s < \varepsilon \right\},$$

où  $\ell_\Gamma$  est la longueur de la courbe  $\Gamma$ . Les bords  $\Gamma$  et  $\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$  vérifient alors

$$\Gamma = \{(t, s) \mid s = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon = \{(t, s) \mid s = \varepsilon\},$$

ce qui explique le choix de ne pas avoir normalisé  $\vec{\nu}(x)$ .

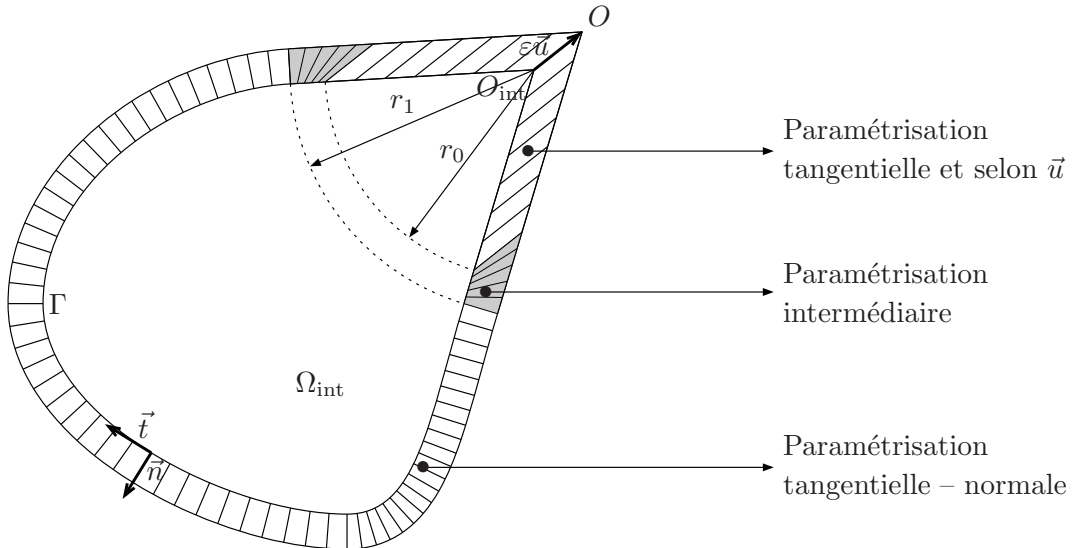


FIG. 3.2 – *Changement de coordonnées : le cas convexe ( $\omega < \pi$ ).*



Dans le chapitre 1, on a eu besoin de l'expression du Laplacien dans un système de coordonnées tangentielles-normales. Il nous faut ici faire le même travail dans les coordonnées définies au paragraphe précédent.

Le choix de l'origine et de l'orientation des axes pour les coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$  importe peu car le Laplacien est invariant par isométrie.

$$\phi = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{dans le cas convexe,} \\ \pi - \frac{\varepsilon}{2} & \text{dans le cas concave.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & t = \frac{x_1}{\sin \phi} \quad \text{et} \quad s = x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi ; \\ \text{si } x_1 < 0, \text{ alors } & t = \ell_\Gamma + \frac{x_1}{\sin \phi} \quad \text{et} \quad s = -x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Dans chacun de ces sous-domaines, on peut obtenir une expression du Laplacien :

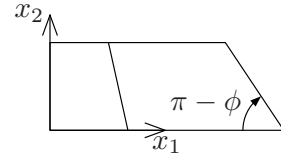
$$(3.3) \quad \Delta = \partial_s^2 \pm 2 \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_{t,s}^2 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \partial_t^2.$$

Le signe dans la dérivée croisée change selon qu'on est dans la partie  $x_1 > 0$  ou  $x_1 < 0$ .

**Remarque.** Comme les segments  $\{(t, s) | t = 0\}$  et  $\{(t, s) | t = \ell_\Gamma\}$  coïncident dans le domaine d'origine  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ , il faudra veiller au raccord quand on obtiendra des solutions extérieures définies indépendamment sur chaque sous-domaine.

### Dans les domaines intermédiaires

On considère le trapèze de la figure ci-contre : il correspond à celui matérialisé sur la figure 3.3. Les autres cas se traitent de la même manière.



Les paramètres valent

$$t = r_1 - \frac{x(r_1 - r_0)}{r_1 - r_0 + x_1 \cos \phi} \quad \text{et} \quad s = x_2,$$

si bien que le Laplacien a une expression de la forme

$$\Delta = \partial_s^2 + \frac{1}{(r_1 - r_0 + s \cos \phi)^2} [P_1(t) \partial_t^2 + P_2(t) \partial_t + P_3(s, t) \partial_{t,s}^2],$$

où  $P_1, P_2, P_3$  sont des polynômes dont les coefficients dépendent de  $r_0, r_1, \cos \phi$ .

### Dans la partie régulière

L'expression suivante a été montrée dans le chapitre 1 :

$$\Delta = \partial_s^2 + \frac{c(t)}{1 + sc(t)} \partial_s + \Delta_{\Gamma_s} \quad \text{avec} \quad \Delta_{\Gamma_s} = \frac{1}{1 + sc(t)} \partial_t \left( \frac{1}{1 + sc(t)} \partial_t \right),$$

où  $c(t)$  désigne la courbure au point de  $\Gamma$  d'abscisse curviligne  $t$ .

### 3.2.3 Expression de la dérivée normale dans les nouvelles coordonnées

La normale considérée est la normale extérieure à  $\Omega_{\text{int}}$ .

#### À proximité du coin

Pour  $x_1 > 0$ , la dérivée normale est donnée par

$$\partial_n = \cos \phi \partial_{x_1} + \sin \phi \partial_{x_2} = \partial_s + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_t.$$

Pour  $x_1 < 0$ , on a l'expression

$$(3.4) \quad \partial_n = -\cos \phi \partial_{x_1} + \sin \phi \partial_{x_2} = \partial_s - \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \partial_t.$$

### Dans les domaines intermédiaires

Avec les notations vues plus haut,  $\partial_n = \partial_{x_2}$ . Donc

$$\partial_n = \partial_s + \frac{r_1 - t}{r_1 - r_0} \cos \phi \partial_t.$$

### Dans la partie régulière

Ici, la situation est simple :  $\partial_n = \partial_s$ .

#### 3.2.4 Dilatation dans la direction $\vec{\nu}$

Dans le but de faire apparaître le petit paramètre  $\varepsilon$  dans les équations et non plus dans la géométrie (on souhaite travailler dans un domaine fixe), on effectue une dilatation de la couche mince  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  dans la direction  $\vec{\nu}$  de sorte que l'épaisseur devienne égale à 1 (voir Figure 3). Le changement de variable effectué est le suivant :

$$S = \frac{s}{\varepsilon},$$

si bien que  $(t, S)$  décrit  $[0, \ell_\Gamma] \times (0, 1)$ . On note  $\Omega = \Omega^1$  le domaine obtenu.

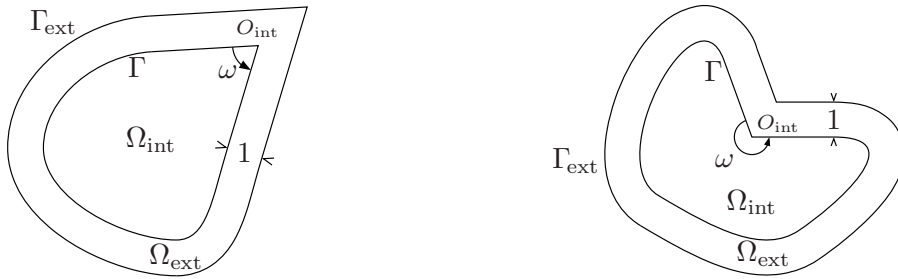


FIG. 3 - Les domaines dilatés.

**Remarque.** Comme on n'a pas supposé que le domaine  $\Omega_{\text{int}}$  était convexe, il est possible que  $\Omega_{\text{ext}}$  ne soit plus une couche mince uniforme autour de  $\Omega_{\text{int}}$  (comme le laisserait croire la figure 3). Néanmoins, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon_0}$  soit tubulaire. Il suffit alors de considérer  $\Omega_{\text{ext}} = \Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon_0}$  qui est encore un domaine fixe par rapport à  $\varepsilon$ .

Après le changement de variable  $s \mapsto S = \frac{s}{\varepsilon}$ , l'expression du Laplacien devient formellement :

$$(3.5) \quad \Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \varepsilon^\ell A_\ell \right).$$

En effet il suffit de développer en puissances de  $\varepsilon$  les expressions donnant le Laplacien dans les différentes parties du domaine extérieur (voir §3.2.2). Les opérateurs  $A_\ell$  contiennent des dérivées selon la variable tangentielle  $t$ , mais au plus une dérivée par rapport à  $S$ .

De la même façon, en s'appuyant sur les expressions de la dérivée normale (voir §3.2.3), on prouve qu'il existe une fonction  $a(t)$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que dans les variables  $(t, S)$ , la dérivée normale s'écrive

$$(3.6) \quad \partial_n = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial S} - \varepsilon a(t) \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Pour une fonction  $v_{\text{ext}}$  définie dans  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ , on notera  $V_{\text{ext}}$  la fonction telle que

$$v_{\text{ext}}(x) = V_{\text{ext}}(t, S).$$

Ainsi  $V_{\text{ext}}$  est définie sur  $(0, \ell_\Gamma) \times (0, 1)$ .

On peut maintenant réécrire les équations (3.1) dans les coordonnées  $(t, S)$  :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \partial_S^2 U_{\text{ext}}^\varepsilon - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \varepsilon^\ell A_\ell U_{\text{ext}}^\varepsilon \right) = 0 & \text{dans } (0, \ell_\Gamma) \times (0, 1), \\ \frac{1}{\varepsilon} [\partial_S U_{\text{ext}}^\varepsilon - a(t) \partial_t U_{\text{ext}}^\varepsilon] = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{0\}, \\ U_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{1\}, \\ \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = U_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

on a supposé que  $f_{\text{ext}} = 0$  et  $g = 0$ , mais l'étude qui suit s'applique dans un cadre plus général (la dépendance de  $f_{\text{ext}}(t, \varepsilon^{-1}s)$  en  $\varepsilon$  doit alors être précisée, comme au chapitre 1).

### 3.3 Premier ansatz

Comme dans le cas régulier, on fait un ansatz série entière pour le problème (3.1) :

$$u_{\text{int}}^\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u_{\text{int}}^n \quad \text{et} \quad U_{\text{ext}}^\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n U_{\text{ext}}^n.$$

En insérant ces expressions dans les équations (3.7), on obtient deux problèmes découplés :



$$(3.8) \quad \begin{cases} \partial_S^2 U_{\text{ext}}^n = \sum_{\substack{\ell+p=n \\ \ell, p \geq 1}} A_\ell U_{\text{ext}}^p & \text{dans } (0, \ell_\Gamma) \times (0, 1), \\ \partial_S U_{\text{ext}}^n = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^{n-1} + a(t) \partial_t U_{\text{ext}}^{n-1} & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{0\}, \\ U_{\text{ext}}^n = 0 & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{1\}, \end{cases}$$

avec la convention  $u^{-1} = U^{-1} = 0$ .

$$(3.9) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^n = f_{\text{int}} \delta_0^n & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^n = U_{\text{ext}}^n|_\Gamma & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

$\delta$  désigne le symbole de Kronecker. La résolution paraît alors habituelle : on résout d'abord le problème extérieur (3.8) qui détermine  $U_{\text{ext}}^n$  à partir de la donnée de  $(u_{\text{int}}^p, U_{\text{ext}}^p)$  pour  $p < n$ . Ensuite, la connaissance de  $U_{\text{ext}}^n|_\Gamma$  nous permet de définir  $u_{\text{int}}^n$  comme solution de (3.9).

Cependant la construction d'un tel développement consomme de la régularité que la présence d'un coin ne nous permet pas d'espérer ici. Examinons les premiers termes pour nous en convaincre.

### Termes de rang 0

La fonction  $U_{\text{ext}}^0$  résout le problème extérieur avec un second membre nul, si bien qu'il est nul dans  $(0, \ell_\Gamma) \times (0, 1)$ . Le retour aux coordonnées cartésiennes ne pose aucun problème :  $u_{\text{ext}}^0 = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ . On est alors en mesure de définir  $u_{\text{int}}^0$  comme solution de

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^0 = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^0 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

### Termes de rang 1

$U_{\text{ext}}^1$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_{\text{ext}}^1 = A^1 U_{\text{ext}}^0 = 0 & \text{dans } (0, \ell_\Gamma) \times (0, 1), \\ \partial_S U_{\text{ext}}^1 = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^0 + \underbrace{a(t) \partial_t U_{\text{ext}}^0}_{=0} & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{0\}, \\ U_{\text{ext}}^1 = 0 & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{1\}. \end{cases}$$

La résolution est explicite :

$$U_{\text{ext}}^1 = \alpha \partial_n u_{\text{int}}^0|_\Gamma (S - 1).$$

à cause du manque de régularité de  $\Gamma$ , le terme  $u_{\text{int}}^0$  peut contenir des singularités ; la première est de la forme

$$\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}(r, \theta) = r^{\frac{\pi}{\omega}} \cos \frac{\pi}{\omega} \theta,$$

où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires centrées en  $O_{\text{int}}$ ,  $\theta \in (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ . Le terme qui limite la régularité de  $U_{\text{ext}}^1$  est donc

$$\partial_n \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}|_{\Gamma}(S-1) = -\frac{\pi}{\omega}(S-1)r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \sin \frac{\pi}{\omega} \theta,$$

qui est dans  $H^1(\Omega_{\text{ext}})$  si et seulement si  $\omega < \frac{2\pi}{3}$  ! Dans le cas contraire, on ne peut pas poursuivre la construction du développement.

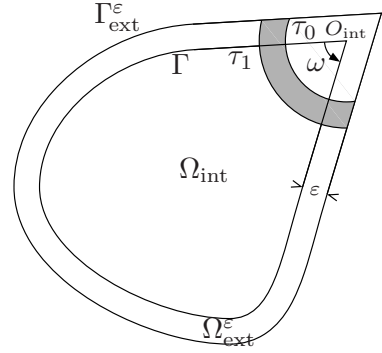
### Prise en compte des singularités

Comme on l'a vu, il n'est pas possible de traiter la partie singulière via le mécanisme de résolution extérieure-intérieure ; on utilisera donc les mêmes variables dans  $\Omega_{\text{int}}$  et  $\Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon}$ . Pour présenter la façon de traiter les singularités, on considère le cas simple où il n'y a qu'une fonction singulière et où  $u_{\text{int}}^0$  admet la décomposition suivante :

$$u_{\text{int}}^0 = u_{\text{plat,int}}^0 + c\chi \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}.$$

Le terme  $u_{\text{plat,int}}^0$  est plat au voisinage de  $O_{\text{int}}$ , le coefficient  $c$  est un nombre réel et  $\chi$  est une fonction de troncature valant 0 loin du coin  $O_{\text{int}}$  et 1 dans la pointe du domaine (la singularité est localisée autour du coin).

On suppose que  $\chi$  est radiale afin de commuter avec la dérivation normale. Enfin, le support de  $\nabla \chi$  est contenu dans la couronne  $[\tau_0 < r < \tau_1]$ .



Notons  $u_{\text{plat}}^0$  la fonction définie par  $u_{\text{plat,int}}^0$  dans  $\Omega_{\text{int}}$  et par 0 dans  $\Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon}$  ; elle vérifie le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta u_{\text{plat,int}}^0 = f_{\text{int}} - \alpha \Delta (c\chi \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}) & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{plat,ext}}^0 = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^{\varepsilon}, \\ u_{\text{plat,int}}^0 = u_{\text{plat,ext}}^0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^0 = \partial_n u_{\text{plat,ext}}^0 + \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{plat,int}}^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^{\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Puisque  $u_{\text{plat},\text{int}}^0$  est plat au voisinage de  $O_{\text{int}}$ , la donnée de Neumann  $\alpha \partial_n u_{\text{plat},\text{int}}^0|_{\Gamma}$  est une fonction régulière et peut donc être traitée au rang 1 par le procédé de résolution extérieure-intérieure classique.

En revanche  $-\alpha \Delta(c\chi \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}})$  est un terme d'ordre 0 dont il faut s'occuper dès à présent. Le défaut de régularité de  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$  nous impose de surmonter cette difficulté globalement, sans découpler les problèmes intérieur et extérieur.

Précisément, on recherche une fonction  $b^\varepsilon$  vérifiant :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta b_{\text{int}}^\varepsilon = \alpha \Delta(\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}) & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta b_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ b_{\text{int}}^\varepsilon = b_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha \partial_n b_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n b_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ b_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Alors  $\tilde{u}^0 = u_{\text{plat}}^0 + c\chi b^\varepsilon$  satisfera le problème (3.1) à l'ordre 0 et constituera de fait un bon début de développement asymptotique. Par conséquent, nous sommes ramenés à la recherche du premier terme du développement asymptotique de la solution du problème (3.10) :

- Pour  $r > \tau_0$ ,  $b^\varepsilon = \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$  convient : même s'il ne vérifie pas la condition de transmission des dérivées normales, le terme résiduel pourra être pris en compte au rang 1 par la résolution extérieure-intérieure.
- Pour  $r < \tau_0$ ,  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$  ne convient plus, il faut faire une étude complémentaire.

Dans ce but on effectue une homothétie de centre  $O_{\text{int}}$  et de rapport  $\frac{1}{\varepsilon}$  ; on note  $Q_{\text{int}}^\varepsilon$ ,  $Q_{\text{ext}}^\varepsilon$ ,  $G^\varepsilon$  et  $G_{\text{ext}}^\varepsilon$  les domaines images de  $\Omega_{\text{int}}$ ,  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ ,  $\Gamma$  et  $\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$ , respectivement. Soit  $\mathfrak{B}^\varepsilon$  la transformée de  $b^\varepsilon$  :

$$b^\varepsilon(r, \theta) = \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}} \mathfrak{B}^\varepsilon\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right).$$

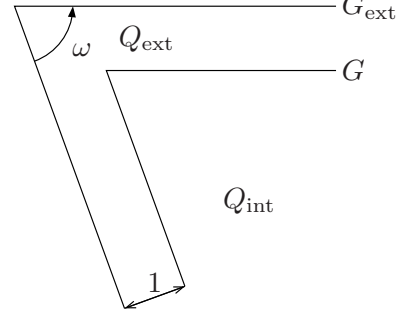
Profitant de l'homogénéité de l'opérateur, on réécrit les équations (3.10) :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta \mathfrak{B}_{\text{int}}^\varepsilon = \varphi^\varepsilon & \text{dans } Q_{\text{int}}^\varepsilon, \\ \Delta \mathfrak{B}_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \mathfrak{B}_{\text{int}}^\varepsilon = \mathfrak{B}_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } G^\varepsilon, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{B}_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n \mathfrak{B}_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } G^\varepsilon, \\ \mathfrak{B}_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}^\varepsilon, \end{array} \right.$$

où  $\varphi^\varepsilon$  est à support dans la couronne  $[\frac{\tau_0}{\varepsilon} < r < \frac{\tau_1}{\varepsilon}]$  (en effet le terme  $\Delta(\chi \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}})$  est nul en dehors de l'ensemble  $[\tau_0 < r < \tau_1]$  car  $\Delta \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}} = 0$ ).

Il s'agit de déterminer  $\mathfrak{B}^0$ , premier terme du développement asymptotique de  $\mathfrak{B}^\varepsilon$ . Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la partie du domaine  $\Omega^\varepsilon$  située à une distance d'ordre  $\varepsilon^0$  est envoyée à l'infini par l'homothétie ; seule compte la pointe du domaine, située proche du coin. Ainsi  $Q^\varepsilon$  devient un secteur plan  $Q$  infini avec une couche mince d'épaisseur 1. Le support du second membre  $\varphi^\varepsilon$  est expédié à l'infini si bien que le problème (3.11) s'écrit au rang 0 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \Delta \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 = \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 = \partial_n \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 & \text{sur } G, \\ \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \end{array} \right.$$



le domaine  $Q$  est représenté sur la figure ci-contre dans le cas convexe ( $\omega < \pi$ ).

Cependant on a perdu toute l'information contenue dans le second membre  $\varphi^\varepsilon$ , qui a été envoyée à l'infini. Puisque  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$  convient comme solution en dehors du voisinage du coin pour premier terme du développement asymptotique, on impose que  $\mathfrak{B}^0$  ait le même comportement à l'infini que  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$ . Précisément, le problème que doit vérifier  $\mathfrak{B}^0$  est le suivant :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \Delta \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 = \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 = \partial_n \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 & \text{sur } G, \\ \mathfrak{B}_{\text{ext}}^0 = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{B}_{\text{int}}^0 \sim \mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}} & \text{quand } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

L'étude de (3.12) a fait l'objet du chapitre précédent où on en a construit une solution notée  $\mathfrak{K}^{\frac{\pi}{\omega}}$  (voir théorème 2.23).

Un bon candidat pour débiter le développement asymptotique du problème (3.1) est donc :

$$\tilde{u}^0 = u_{\text{plat}}^0 + c\chi b^\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} u_{\text{plat,int}}^0 + c\chi \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ c\chi \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Si on compare cette expression avec celle de  $u^0$ , on s'aperçoit qu'on a remplacé la singularité du problème intérieur  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$  par une autre fonction singulière, mais cette dernière correspond au problème de transmission lui-même.

On a donc trouvé un moyen de traiter la singularité  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$ . Or les singularités dues à l'opérateur intérieur sont du même type que  $\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$ , on pourra donc les traiter de la même manière. En revanche si le second membre  $f_{\text{int}}$  n'a pas un développement de Taylor nul au voisinage du coin, des singularités contenant des logarithmes de  $r$  peuvent apparaître. Afin d'éviter dans un premier temps cette difficulté, on suppose que  $f_{\text{int}}$  est une fonction plate au voisinage du coin  $O_{\text{int}}$ . On verra plus loin comment traiter le cas d'une fonction  $f$  plus générale.

### 3.4 Les premiers termes du développement

On suppose que  $f_{\text{int}}$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et plate au voisinage du coin (c'est-à-dire qu'elle s'annule en  $O_{\text{int}}$ , ainsi que toutes ses dérivées, jusqu'à un certain ordre).

#### Termes de rang 0

Soit  $u_{\text{ext}}^0 = 0$  et  $u_{\text{int}}^0$  la solution du problème intérieur :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^0 = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^0 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Comme  $f_{\text{int}}$  est plate en  $O_{\text{int}}$ ,  $u_{\text{int}}$  admet la décomposition suivante (voir [12]) :

$$u_{\text{int}}^0 = u_{\text{plat,int}}^0 + \chi \sum_{\substack{\frac{q\pi}{\omega} < K \\ q \geq 1}} c_q^0 \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(r, \theta) \quad \text{avec} \quad u_{\text{plat,int}}^0 = \mathcal{O}(r^K) \text{ quand } r \rightarrow 0.$$

Le choix de l'entier  $K$  dépend du degré jusqu'où l'on pousse le développement asymptotique et sera précisé par la suite. Les fonctions singulières  $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  sont définies par

$$\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(r, \theta) = \begin{cases} r^{\frac{q\pi}{\omega}} \cos \frac{q\pi}{\omega} \theta & \text{si } q \text{ est impair,} \\ r^{\frac{q\pi}{\omega}} \sin \frac{q\pi}{\omega} \theta & \text{si } q \text{ est pair,} \end{cases} \quad \theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right).$$

Pour chaque  $q$ , on note alors  $\mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  la solution construite au chapitre précédent (cf. théorème 2.23) pour le problème

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \Delta \mathfrak{K}_{\text{ext}}^{\frac{q\pi}{\omega}} = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} = \mathfrak{K}_{\text{ext}}^{\frac{q\pi}{\omega}} & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} = \partial_n \mathfrak{K}_{\text{ext}}^{\frac{q\pi}{\omega}} & \text{sur } G, \\ \mathfrak{K}_{\text{ext}}^{\frac{q\pi}{\omega}} = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} \sim \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}} & \text{quand } r \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

On pose alors

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\text{int}}^0 &= u_{\text{plat,int}}^0 + \chi \sum_{\substack{\frac{q\pi}{\omega} < K \\ q \geq 1}} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right), \\ &= u_{\text{int}}^0 + k_\varepsilon^0,\end{aligned}$$

avec

$$(3.14) \quad k_\varepsilon^0 = \chi \sum_{\substack{\frac{q\pi}{\omega} < K \\ q \geq 1}} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \left[ \mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) - \mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right],$$

où  $\mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}}$  est le prolongement par continuité de  $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  à  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  ( $\mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} = 0$  dans  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ ).

Dans la partie extérieure, on définit de même (noter que  $u_{\text{ext}}^0 = 0$ )

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\text{ext}}^0 &= \chi \sum_{\substack{\frac{q\pi}{\omega} < K \\ q \geq 1}} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right), \\ &= k_\varepsilon^0.\end{aligned}$$

Ainsi  $\tilde{u}^0$  résout le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta \tilde{u}_{\text{int}}^0 = f_{\text{int}} + \alpha \Delta k_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_{\text{int}} \\ \Delta \tilde{u}_{\text{ext}}^0 = \Delta k_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon \\ \tilde{u}_{\text{int}}^0 = \tilde{u}_{\text{ext}}^0 & \text{sur } \Gamma \\ \alpha \partial_n \tilde{u}_{\text{int}}^0 = \partial_n \tilde{u}_{\text{ext}}^0 + \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^0 & \text{sur } \Gamma \\ \tilde{u}_{\text{ext}}^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon \end{array} \right.$$

Afin de poursuivre notre étude, il nous faut préciser le terme  $\Delta k_\varepsilon^0$  :

**Lemme 3.2** *Soit  $k_\varepsilon^0$  définie par (3.14). Le support de  $\Delta k_\varepsilon^0$  est contenu dans la couronne  $[\tau_0 < r < \tau_1]$  et pour tout  $P \in \mathbb{N}$ , on a*

$$(3.15) \quad \Delta k_\varepsilon^0 = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{U} \\ 0 < \mu \leq P}} \varepsilon^\mu f^{0,\mu}[\log \varepsilon] + f^{0(P)}(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad f^{0(P)}(\varepsilon) = o(\varepsilon^P),$$

où

$$\mathcal{U} = \{ \mu = p \in \mathbb{N} \} \cup \{ \mu = \frac{h\pi}{\omega} + p \mid h, p \in \mathbb{N}, h \geq 2 \}.$$

La notation  $[\log \varepsilon]$  désigne un polynôme en  $\log \varepsilon$  à coefficients dans les fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , plates en  $O_{\text{int}}$ .

De plus, le terme  $f^{0,p}$ , pour  $p$  entier, ne dépend que des termes  $\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \frac{q\pi}{\omega}-\ell}$ , pour  $0 \leq \ell \leq p$  – termes du développement à l'infini des profils  $(\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}})_q$ , qui apparaissent dans (3.14).

DÉMONSTRATION. On a, par définition de  $k_{\varepsilon}^0$ ,

$$(3.16) \quad \Delta k_{\varepsilon}^0 = \sum_{\substack{\frac{q\pi}{\omega} \leq K \\ q \geq 1}} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \left[ 2\nabla \chi(r) \cdot \nabla \left( \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} \right) \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) + \Delta \chi(r) \left( \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} \right) \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right].$$

Le théorème 2.23 fournit le développement asymptotique en  $+\infty$  de  $\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  :

$$\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}} = \mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} + \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} \cup \mathfrak{Q}^- \\ -P \leq \mu < \frac{q\pi}{\omega}}} \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} + \mathcal{O}(r^{\frac{q\pi}{\omega}-P}) \text{ quand } r \rightarrow +\infty \text{ avec } \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^{\mu}(\check{Q}) \right).$$

Rappelons la définition de l'ensemble des pôles :

$$\mathfrak{Q}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} = \left\{ \frac{q\pi}{\omega} - p \mid p \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q}^- = \left\{ -\frac{\ell\pi}{\omega} - p \mid \ell, p \in \mathbb{N} \text{ avec } \ell > 0 \right\}.$$

D'autre part la condition  $\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^{\mu}(\check{Q}) \right)$  permet de préciser la structure de chacun des termes de la somme précédente :

$$\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) = \varepsilon^{-\mu} f^{(\mu)}[\log \varepsilon](r, \theta) \quad \text{et} \quad \nabla \left( \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right) = \varepsilon^{-\mu} \vec{f}^{(\mu)}[\log \varepsilon](r, \theta),$$

où  $f^{(\mu)}(r, \theta)[\log \varepsilon]$  et  $\vec{f}^{(\mu)}(r, \theta)[\log \varepsilon]$  sont polynomiales en  $\log \varepsilon$ .

De plus, le support de  $\nabla \chi$  et  $\Delta \chi$  est inclus dans la couronne  $[\tau_0 < r < \tau_1]$ . Donc (3.16) devient

$$\begin{aligned} \Delta k_{\varepsilon}^0 &= \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} \cup \mathfrak{Q}^- \\ \frac{q\pi}{\omega} - P \leq \mu < \frac{q\pi}{\omega}}} c_q^0 \left[ 2\nabla \chi(r) \cdot \nabla \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} + \Delta \chi(r) \mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}, \mu} \right] \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) + f^{0(P)}(\varepsilon) \\ &= \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} \sum_{\mu} \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}-\mu} c_q^0 \underbrace{\left[ 2\nabla \chi(r) \cdot \vec{f}^{(\mu)}(r, \theta)[\log \varepsilon] + \Delta \chi(r) f^{(\mu)}(r, \theta)[\log \varepsilon] \right]}_{g^{0,q,\mu}[\log \varepsilon]} + f^{0(P)}(\varepsilon). \end{aligned}$$

En explicitant la définition de  $\mathfrak{Q}_0^{\frac{q\pi}{\omega}}$  et  $\mathfrak{Q}^-$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} \sum_{\substack{\mu \in \Omega_0^+ \cup \Omega^- \\ \frac{q\pi}{\omega} - P \leq \mu < \frac{q\pi}{\omega}}} \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega} - \mu} g^{0,q,\mu}[\log \varepsilon] \\
&= \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} \left[ \sum_{p=1}^P \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega} - (\frac{q\pi}{\omega} - p)} g^{0,q,\frac{q\pi}{\omega} - p}[\log \varepsilon] + \sum_{\ell=q-\frac{P\omega}{\pi}}^{-1} \sum_{p=0}^{P-\frac{\pi}{\omega}(q-\ell)} \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega} - (\frac{\ell\pi}{\omega} - p)} g^{0,q,\frac{\ell\pi}{\omega} - p}[\log \varepsilon] \right] \\
&= \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} \left[ \sum_{p=1}^P \varepsilon^p g^{0,q,\frac{q\pi}{\omega} - p}[\log \varepsilon] + \sum_{h=q+1}^{\frac{P\omega}{\pi}} \sum_{p=0}^{P-\frac{h\pi}{\omega}} \varepsilon^{\frac{h\pi}{\omega} + p} g^{0,q,\frac{(q-h)\pi}{\omega} - p}[\log \varepsilon] \right] \\
&= \sum_{p=1}^P \varepsilon^p \underbrace{\sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} g^{0,q,\frac{q\pi}{\omega} - p}[\log \varepsilon]}_{f^{0,p}[\log \varepsilon]} + \sum_{h=2}^{\frac{P\omega}{\pi}} \sum_{p=0}^{P-\frac{h\pi}{\omega}} \varepsilon^{\frac{h\pi}{\omega} + p} \underbrace{\sum_{q=1}^{h-1} g^{0,q,\frac{(q-h)\pi}{\omega} - p}[\log \varepsilon]}_{f^{0,\frac{h\pi}{\omega} + p}[\log \varepsilon]}.
\end{aligned}$$

Le reste  $f^{0(P)}(\varepsilon)$  est défini par

$$f^{0(P)}(\varepsilon) = \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} c_q \left[ 2\varepsilon^{-1} \nabla \chi(r) \cdot \vec{F}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + \Delta \chi(r) F\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta_i\right) \right],$$

où

$$F(r, \theta) = \mathcal{O}(r^{\frac{q\pi}{\omega} - P}) \quad \text{et} \quad \vec{F}(r, \theta) = \mathcal{O}(r^{\frac{q\pi}{\omega} - P - 1}) \quad \text{quand} \quad r \rightarrow +\infty,$$

si bien que

$$f^{0(P)}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^P) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

**Remarque.** Le degré des fonctions  $f^{0,\mu}[\log \varepsilon]$  augmente au plus d'une unité quand  $p$  ou  $h$  augmente de 1. D'autre part si  $\frac{\pi}{\omega}$  n'est pas rationnel, il n'y a pas de termes logarithmiques (le degré du polynôme est nul).

Dans le développement (3.15), le terme de plus petite puissance en  $\varepsilon$  est  $\varepsilon f^{0,1}[\log \varepsilon]$ . Le suivant est

$$\begin{cases} \varepsilon^{\frac{2\pi}{\omega}} f^{0,\frac{2\pi}{\omega}}[\log \varepsilon] & \text{si } \frac{\pi}{\omega} < 1, \\ \varepsilon^2 f^{0,2}[\log \varepsilon] & \text{sinon.} \end{cases}$$

De ce fait,  $\tilde{u}^0$  constitue le début du développement asymptotique de  $u^\varepsilon$  car  $\Delta k_\varepsilon^0$  est un terme d'ordre 1.



### Termes de rang $1 \leq \mu < 2$

On peut maintenant poursuivre notre développement asymptotique : il nous faut rattraper les termes en  $\varepsilon^\mu$  pour  $1 \leq \mu < 2$  :  $U_{\text{plat,ext}}^\mu$  résout

$$\begin{cases} \partial_S^2 U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] = 0 & \text{dans } (0, \ell_\Gamma) \times (0, 1), \\ \partial_S U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] = \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^{\mu-1} + \underbrace{a(t) \partial_t U_{\text{plat,ext}}^{\mu-1}}_{=0} & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{0\}, \\ U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] = 0 & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{1\}. \end{cases}$$

Notons que la donnée de Neumann  $\alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^{\mu-1}|_\Gamma$  est non nulle seulement pour  $\mu = 1$ . De plus, la donnée pour la dérivée  $\partial_S^2$  est nulle car l'effet du terme  $\Delta k_{\varepsilon,\text{ext}}^0$  est d'ordre 2. D'autre part, comme le second membre est plat en  $t = 0$  et  $t = \ell_\Gamma$ , il en est de même pour  $U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon]$ . On peut donc assurer le raccord au voisinage du coin et revenir aux coordonnées cartésiennes :  $u_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] \in H^1(\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon)$ .

Les termes intérieurs sont définis par

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon] = f^{0,\mu}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon] = U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Afin de pouvoir continuer la construction du développement, on scinde  $u_{\text{int}}^\mu$  en partie plate et singularités :

$$u_{\text{int}}^\mu = u_{\text{plat,int}}^\mu + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} c_q^\mu \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(r, \theta).$$

Comme on l'a déjà fait au rang 0, on remplace les singularités  $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  du problème intérieur par les singularités du problème de transmission qui leur correspondent : le début du développement asymptotique est donc

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\approx u_{\text{plat}}^0 + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + \sum_{1 \leq \mu < 2} \varepsilon^\mu \left[ u_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} c_q^\mu \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \right] \\ &= \sum_{0 \leq \mu < 2} \varepsilon^\mu u_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < 2} c_q^\mu \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right). \end{aligned}$$

On peut préciser les indices qui interviennent dans la somme sur  $\mu$  : les premiers sont  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1$ , puis suivent – s'ils sont entre 1 et 2 – les indices  $\frac{2\pi}{\omega}$  et  $\frac{3\pi}{\omega}$ .

La proposition suivante précise la forme explicite des restrictions à  $\Gamma$  des premiers termes extérieurs, qui nous sera utile dans le chapitre 4.

**Proposition 3.3** *Les termes  $U_{\text{plat,ext}}^\mu|_\Gamma$  correspondant à  $\mu < 3$  sont donnés par*

- $U_{\text{plat,ext}}^0|_\Gamma = 0$  ;
- $U_{\text{plat,ext}}^1|_\Gamma = -\alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_\Gamma$  ;
- $U_{\text{plat,ext}}^{\frac{2\pi}{\omega}}|_\Gamma = 0$  ;
- $U_{\text{plat,ext}}^{\frac{3\pi}{\omega}}|_\Gamma = 0$  ;
- $U_{\text{plat,ext}}^2|_\Gamma = \frac{c(x)}{2} \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_\Gamma - \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^1|_\Gamma$  ;
- $U_{\text{plat,ext}}^{1+\frac{2\pi}{\omega}}|_\Gamma = -\alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^{\frac{2\pi}{\omega}}|_\Gamma$  ;
- $U_{\text{plat,ext}}^{1+\frac{3\pi}{\omega}}|_\Gamma = -\alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^{\frac{3\pi}{\omega}}|_\Gamma$  .

(on rappelle que  $c(x)$  désigne la courbure au point  $x$  de  $\Gamma$ ).

DÉMONSTRATION. Ces résultats ont déjà été prouvés pour  $\mu = 0, 1, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{\omega}$ . Examinons en détail le cas  $\mu = 2$  : par définition,  $U_{\text{plat,ext}}^2$  résout le problème suivant.

$$(3.17) \quad \begin{cases} \partial_S^2 U_{\text{plat,ext}}^2[\log \varepsilon] = A_1 U_{\text{plat,ext}}^1 & \text{dans } (0, \ell_\Gamma) \times (0, 1), \\ \partial_S U_{\text{plat,ext}}^2[\log \varepsilon] = \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^1|_\Gamma + a(t) \partial_t U_{\text{plat,ext}}^1 & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{0\}, \\ U_{\text{plat,ext}}^2[\log \varepsilon] = 0 & \text{sur } (0, \ell_\Gamma) \times \{1\}, \end{cases}$$

avec  $U_{\text{plat,ext}}^1 = \alpha(S-1) \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_\Gamma$ .

Il nous faut distinguer trois cas, car l'opérateur  $A_1$  et la fonction  $a(t)$  sont définis différemment dans les trois parties du domaine extérieur. On reprend ici les notations des paragraphes 3.2.2 et 3.2.3.

- À proximité du coin,  $A_1$  et  $a(t)$  sont donnés par

$$A_1 = \mp 2 \cot \phi \partial_{t,S}^2 \quad \text{et} \quad a(t) = \mp \cot \phi ,$$

si bien que la résolution du problème (3.17) fournit

$$U_{\text{plat,ext}}^2 = \mp \alpha \cot \phi S(S-1) \partial_t \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_\Gamma + \alpha(S-1) \partial_n u_{\text{plat,int}}^1|_\Gamma .$$

- Dans la partie intermédiaire,  $A_1$  et  $a(t)$  sont donnés par

$$A_1 = 2 \cos \phi \frac{r_1 - t}{r_1 - r_0} \quad \text{et} \quad a(t) = \cot \phi \frac{r_1 - t}{r_1 - r_0},$$

d'où

$$U_{\text{plat,ext}}^2 = \cos \phi \frac{r_1 - t}{r_1 - r_0} S(S-1) \partial_t \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_{\Gamma} + \alpha(S-1) \partial_n u_{\text{plat,int}}^1|_{\Gamma}.$$

- Dans la partie régulière,  $A_1$  et  $a(t)$  sont donnés par

$$A_1 = -c(x) \partial_s \quad \text{et} \quad a(t) = 0;$$

on retrouve ici les résultats du chapitre 1 :

$$U_{\text{plat,ext}}^2 = -\frac{c(x)}{2} (S^2 - 1) \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_{\Gamma} + \alpha(S-1) \partial_n u_{\text{plat,int}}^1|_{\Gamma}.$$

Il suffit, pour conclure, d'évaluer les expressions ci-dessus en  $S = 0$  et de remarquer que  $c(x) = 0$  dans les deux premiers cas.

Les valeurs  $\mu = \frac{2\pi}{\omega}$  et  $\mu = \frac{3\pi}{\omega}$  se traitent immédiatement, comme le cas  $\mu = 1$ . ■

### 3.5 La construction complète

Le procédé décrit dans le paragraphe précédent se généralise à tout ordre. Les termes du développement asymptotique sont de deux sortes :

- les termes de résolution extérieure-intérieure, qui ne rendent pas compte du comportement singulier de  $u^\varepsilon$  au coin (termes “plats”  $u_{\text{plat}}^\mu$ ) ;
- les termes de correction au coin qui ont une structure polaire au coin (les profils  $\mathfrak{K}_{\frac{q\pi}{\omega}}(\frac{r}{\varepsilon}, \theta)$ ).

**Théorème 3.4** *Soit  $N \geq 1$  et  $K > N$ . On suppose que le second membre  $f_{\text{int}}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et plat au voisinage du coin  $O_{\text{int}}$ , jusqu'à la dérivée d'ordre  $K$ . Alors on peut construire les suites  $(u_{\text{plat,int}}^\mu)$  et  $(U_{\text{plat,ext}}^\mu)$  à l'aide des problèmes (3.20) et (3.21) plus bas. La solution  $u^\varepsilon$  du problème (3.1) admet le développement suivant*

$$(3.18) \quad u^\varepsilon = \sum_{0 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu u_{\text{plat}}^\mu [\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < N} c_q^\mu [\log \varepsilon] \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}_{\frac{q\pi}{\omega}}(\frac{r}{\varepsilon}, \theta) + r_\varepsilon^N,$$

avec

$$u_{\text{plat}}^\mu|_{\Omega_{\text{int}}} = u_{\text{plat,int}}^\mu \quad \text{et} \quad u_{\text{plat}}^\mu|_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon}(t, s) = U_{\text{ext}}^\mu(t, \varepsilon^{-1}s).$$

La notation  $[\log \varepsilon]$  désigne une dépendance polynomiale en  $\log \varepsilon$  ; l'ensemble des indices  $\mu$  considérés est le suivant :

$$\mathcal{U} = \{\mu = p \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu = \frac{h\pi}{\omega} + p \mid h, p \in \mathbb{N}, h \geq 2\}.$$

Le terme  $u_{\text{plat}}^\mu$  est plat jusqu'à la dérivée d'ordre  $K - \lfloor \mu \rfloor$  au coin  $O_{\text{int}}$ . Enfin, on a l'estimation suivante pour le reste

$$(3.19) \quad \|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})} + \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon)} \leq c \varepsilon^N |\log \varepsilon|^{N-1} \|f_{\text{int}}\|_{H^N(\Omega_{\text{int}})}.$$

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur  $N$  : supposons le développement asymptotique obtenu jusqu'au rang  $N - 1$ .

Pour  $N - 1 \leq \mu < N$ , on peut définir  $U_{\text{plat,ext}}^\mu$  comme solution du problème

$$(3.20) \quad \begin{cases} \partial_S^2 U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] = \sum_{\ell+\nu=\mu} A_\ell U_{\text{plat,ext}}^\nu[\log \varepsilon] + TF^{N,\mu}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Gamma \times (0, 1), \\ \partial_S U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] = \alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^{\mu-1}[\log \varepsilon]|_\Gamma + a(t) \partial_S U_{\text{plat,ext}}^{\mu-1}[\log \varepsilon]|_\Gamma & \text{sur } \Gamma \times \{0\}, \\ U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] = 0 & \text{sur } \Gamma \times \{1\}. \end{cases}$$

Les données du second membre sont déterminées aux étapes précédentes. Le terme  $TF^{N,\mu}$  est la contribution des développements de Taylor en  $S = 0$  des fonctions  $f^{k,\mu}$  pour  $k < N - 1$ . Toutes ces données sont plates au voisinage du coin jusqu'à l'ordre  $K - \lfloor \mu \rfloor$ . En effet la dérivation normale du terme intérieur fait perdre un cran dans l'annulation des dérivées à chaque étape. On en déduit que  $U_{\text{plat,ext}}^\mu$  est lui aussi plat en  $t = 0$  et  $t = \ell_\Gamma$ , jusqu'à la dérivée d'ordre  $K - \lfloor \mu \rfloor$ . On peut donc assurer le raccord pour revenir aux coordonnées cartésiennes initiales et définir  $u_{\text{plat,ext}}^\mu$  sur la couche mince  $\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$ .

La résolution intérieure, quant à elle, s'écrit

$$(3.21) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon] = \alpha \sum_{k < N-1} f^{k,\mu}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon] = U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon] & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Or les fonctions  $f^{k,\mu}[\log \varepsilon]$  sont plates au coin car leur support est inclus dans la couronne  $[\tau_0 < r < \tau_1]$ . En outre  $U_{\text{plat,ext}}^\mu[\log \varepsilon]$  est plat jusqu'à l'ordre  $K - \lfloor \mu \rfloor$ , donc le terme intérieur se scinde en partie plate et singularités :

$$(3.22) \quad u_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon] = u_{\text{plat,int}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} c_q^\mu[\log \varepsilon] \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(r, \theta),$$

$$\text{avec } u_{\text{plat,int}}^\mu[\log \varepsilon] = \mathcal{O}(r^{K-\mu}) \quad \text{quand } r \rightarrow 0.$$

On remplace alors les singularités  $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  du problème intérieur par celles qui correspondent pour le problème de transmission. Cela revient à ajouter le terme suivant au développement asymptotique :

$$(3.23) \quad \varepsilon^\mu k_\varepsilon^\mu = \chi \varepsilon^\mu \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} c_q^\mu [\log \varepsilon] \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \left[ \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) - \mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right],$$

( $\mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  est défini par le théorème 2.23). De la même façon que dans le lemme 3.2, on peut développer en puissances de  $\varepsilon$  le Laplacien du terme de correction coin : pour tout  $P \in \mathbb{N}$ ,

$$(3.24) \quad \sum_{N-1 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu \Delta k_\varepsilon^\mu = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{U} \\ N \leq \mu \leq P}} \varepsilon^\mu f^{N,\mu} [\log \varepsilon] + f^{N(P)}(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad f^{N(P)}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^P),$$

on rappelle que  $\mathcal{U} = \{\mu = p \in \mathbb{N}\} \cup \{\mu = \frac{h\pi}{\omega} + p \mid h, p \in \mathbb{N}, h \geq 2\}$ .

Ainsi le reste  $r_\varepsilon^N$  vérifie les équations suivantes, pour  $P > N$  :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta r_{\varepsilon, \text{int}}^N = \alpha \sum_{N \leq \mu \leq P} \varepsilon^\mu \sum_{n \leq N} f^{n,\mu} [\log \varepsilon] + \mathcal{O}(\varepsilon^P) & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ r_{\varepsilon, \text{int}}^N = r_{\varepsilon, \text{ext}}^N & \text{sur } \Gamma, \\ \Delta r_{\varepsilon, \text{ext}}^N = \mathcal{O}(\varepsilon^N) & \\ \quad + \sum_{N \leq \mu \leq P} \varepsilon^{\mu-2} \sum_{\ell+\nu=\mu} \varepsilon^{\beta_\ell} A_\ell u_{\text{plat}, \text{ext}}^\mu [\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \partial_n r_{\varepsilon, \text{ext}}^N = \alpha \partial_n r_{\varepsilon, \text{int}}^N + \alpha \sum_{N-1 \leq \mu < N} \varepsilon^{\mu-1} \partial_n u_{\text{plat}, \text{int}}^\mu [\log \varepsilon] & \\ \quad - a(t) \sum_{N-1 \leq \mu < N} \varepsilon^{\mu-1} \partial_t u_{\text{plat}, \text{ext}}^\mu [\log \varepsilon] & \text{sur } \Gamma, \\ r_{\varepsilon, \text{ext}}^N = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}, \end{array} \right.$$

( $\beta_\ell$  vaut 1 si  $A_\ell$  contient une dérivation selon  $S$ , 0 sinon).

L'estimation (3.19) se déduit de l'estimation a priori obtenue dans la proposition 3.1. En effet le second membre du problème vérifié par  $r_\varepsilon^N$  est d'ordre  $\varepsilon^{N-2}$ . Donc l'estimation a priori (3.2) fournit :

$$\|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C [\log \varepsilon] \varepsilon^{N-2}.$$

On peut améliorer ce résultat en écrivant que

$$(3.26) \quad r_\varepsilon^N = r_\varepsilon^{N+2} + \sum_{N \leq \mu < N+2} \varepsilon^\mu u_{\text{plat}}^\mu [\log \varepsilon] + \chi \sum_{N \leq \mu < N+2} \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} c_q^\mu \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right).$$

Les termes  $u_{\text{plat,int}}^\mu$  et  $U_{\text{plat,ext}}^\mu$  ont une dépendance polynomiale en  $\log \varepsilon$ . Le retour aux coordonnées initiales dans  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  fournit :

$$\|u_{\text{int}}^\mu\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})} \sim [\log \varepsilon] \quad \text{et} \quad \|u_{\text{ext}}^\mu\|_{H^1(\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon)} \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} [\log \varepsilon].$$

D'autre part, le comportement en l'infini des profils  $k^{\frac{q\pi}{\omega}}$  permet d'écrire :

$$\|\varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})} \sim [\log \varepsilon] \quad \text{et} \quad \|\varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega_{\text{ext}})} \sim [\log \varepsilon].$$

De cette manière la relation (3.26) permet de déduire l'estimation (3.19) ; la dépendance par rapport à  $f_{\text{int}}$  se prouve par récurrence. ■

**Remarque.** Le développement obtenu est multi-échelle :

- dans les termes provenant de la résolution du problème de Dirichlet intérieur, seules les variables initiales  $x_1, x_2$  apparaissent,
- les termes extérieurs font intervenir les variables semi-dilatées  $(t, S)$ ,
- enfin les termes-coins utilisent les variables dilatées dans les deux directions  $\frac{x_1}{\varepsilon}$  et  $\frac{x_2}{\varepsilon}$ .

### 3.6 Cas d'un second membre non plat

Le développement asymptotique (3.18) est valable pour un second membre  $f_{\text{int}}$  plat au coin  $O_{\text{int}}$  ; l'objet de ce paragraphe est d'étudier le cas général. La fonction  $f_{\text{int}}$  étant supposée de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut écrire en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  au voisinage de  $O_{\text{int}}$  :

$$f_{\text{int}} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{|\beta|=\ell} a_\beta r^\ell \cos^{\beta_1} \theta \sin^{\beta_2} \theta + \mathcal{O}(r^L) \quad (a_\beta \in \mathbb{R}).$$

Il suffit alors de résoudre une partie de ce développement à l'aide de profils construits sur le domaine infini  $Q$  pour se ramener au cas d'un second membre plat (au moins jusqu'à un certain ordre arbitraire).

**Proposition 3.5** *On note  $\mathfrak{W}^\beta$  les profils construits au corollaire 2.25. Alors la fonction*

$$\tilde{u}^\varepsilon = u^\varepsilon - \chi \sum_{\ell=0}^L \sum_{|\beta|=\ell} a_\beta \varepsilon^{\ell+2} \mathfrak{W}^\beta(\frac{r}{\varepsilon}, \theta)$$

*est solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta \tilde{u}_{\text{int}}^\varepsilon = \tilde{f}_{\text{int}} + \alpha \varphi_{\text{int}}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta \tilde{u}_{\text{ext}}^\varepsilon = \varphi_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \tilde{u}_{\text{int}}^\varepsilon = \tilde{u}_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha \partial_n \tilde{u}_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n \tilde{u}_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ \tilde{u}_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon, \end{array} \right.$$

où  $\varphi^\varepsilon$  est à support compact dans la couronne  $\tau_0 < r < \tau_1$ . la fonction  $\tilde{f}_{\text{int}}$  est plate jusqu'à l'ordre  $L$  au coin  $O_{\text{int}}$ , i.e.

$$\tilde{f}_{\text{int}} = \mathcal{O}(r^L) \quad \text{quand } r \rightarrow 0.$$

De plus, la fonction  $\varphi$  admet le développement suivant pour tout entier  $P$  :

$$\varphi^\varepsilon = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{U} \\ 0 < \mu \leq P}} \varepsilon^\mu f^{-1, \mu}[\log \varepsilon] + f^{-1(P)}(\varepsilon) \quad \text{avec } f^{-1(P)}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^P).$$

DÉMONSTRATION. Rappelons le problème vérifié par le profil  $\mathfrak{W}^\beta$  dans le domaine infini  $Q$  (le nombre  $\Lambda$  du corollaire 2.25 vaut ici  $\ell + 2$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta = 0 & \text{dans } Q_{\text{ext}}, \\ \alpha \Delta \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta = r^\ell \cos^{\beta_1} \theta \sin^{\beta_2} \theta & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta = 0 & \text{sur } G_{\text{ext}}, \\ \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta = \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta & \text{sur } G, \\ \alpha \partial_n \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta = \partial_n \mathfrak{W}_{\text{ext}}^\beta & \text{sur } G. \end{array} \right.$$

Évaluons  $\Delta \tilde{u}_{\text{int}}$  :

$$\Delta \tilde{u}_{\text{int}} = \Delta u_{\text{int}} - \chi \sum_{\ell=0}^L \sum_{|\beta|=\ell} a_\beta \varepsilon^{\ell+2} \varepsilon^{-2} \Delta \mathfrak{W}_{\text{int}}^\beta \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) + \alpha \varphi_{\text{int}}^\varepsilon,$$

où le terme  $\varphi_{\text{int}}^\varepsilon$  provient des dérivées de la fonction de troncature  $\chi$  et est donc à support compact dans la couronne  $\tau_0 < r < \tau_1$ . Ainsi

$$\Delta \tilde{u}_{\text{int}} = f_{\text{int}} - \chi \sum_{\ell=0}^L \sum_{|\beta|=\ell} a_\beta r^\ell \cos^{\beta_1} \theta \sin^{\beta_2} \theta + \alpha \varphi_{\text{int}}^\varepsilon = \mathcal{O}(r^L) \quad \text{quand } r \rightarrow 0.$$

De la même façon, on montre que  $\Delta \tilde{u}_{\text{ext}}$  est à support compact dans la couronne  $\tau_0 < r < \tau_1$ .

Le développement en puissance de  $\varepsilon$  de la fonction  $\varphi^\varepsilon$  provient de l'étude du comportement à l'infini des termes  $\mathfrak{W}^\beta$  donné au corollaire 2.25 ; la démonstration est identique à celle du lemme 3.2. ■

On peut donc énoncer un résultat similaire au théorème 3.4, les fonctions  $f^{-1, \mu}$  étant traitées de la même façon que les  $f^{k, \mu}$  provenant des profils homogènes  $\mathfrak{R}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}}$ .

**Théorème 3.6** *Soit  $N \geq 1$  et  $L > N$ . La solution  $u^\varepsilon$  du problème (3.1) admet le développement suivant*

$$(3.27) \quad \begin{aligned} u^\varepsilon = & \sum_{0 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu u_{\text{plat}}^\mu [\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 < \mu < N} c_q^\mu \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \\ & + \chi \sum_{\ell=0}^L \sum_{|\beta|=\ell} a_\beta \varepsilon^{\ell+2} \mathfrak{W}^\beta \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) + r_\varepsilon^N. \end{aligned}$$

La notation  $[\log \varepsilon]$  désigne une dépendance polynomiale en  $\log \varepsilon$  ; l'ensemble des indices  $\mu$  considérés est le suivant :

$$\mathcal{U} = \{ \mu = p \in \mathbb{N} \} \cup \{ \mu = \frac{h\pi}{\omega} + p \mid h, p \in \mathbb{N}, h \geq 2 \}.$$

Le terme  $u_{\text{plat}}^\mu$  est plat jusqu'à la dérivée d'ordre  $L - \lfloor \mu \rfloor$  au coin  $O_{\text{int}}$ . Enfin, on a l'estimation suivante pour le reste

$$\|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})} + \sqrt{\varepsilon} \|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon)} \leq c \varepsilon^N |\log \varepsilon|^{N-1} \|f_{\text{int}}\|_{H^N(\Omega_{\text{int}})}.$$

### 3.7 Conclusion

On a construit un développement asymptotique pour la solution du problème de transmission dans un domaine présentant un coin d'ouverture quelconque. Les techniques utilisées au chapitre 1 dans le cas régulier nous ont guidé ; les profils construits au chapitre 2 permettent de corriger le développement asymptotique au voisinage du coin, faisant ainsi apparaître des puissances non-entières de  $\varepsilon$ .

Commentons la structure du développement (3.27) : les termes  $u_{\text{plat}}^\mu$  sont les termes classiques de résolution extérieure-intérieure similaires à ceux obtenus dans le cas d'une géométrie régulière. La présence du coin dans le domaine introduit les profils :  $\mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  prend en compte les singularités de l'opérateur et  $\mathfrak{W}^\beta$  le développement de Taylor au coin du second membre initial  $f_{\text{int}}$ . La fonction de troncature peut faire apparaître des logarithmes dans les termes  $u_{\text{plat}}^\mu$  ; notons que ces  $\log \varepsilon$  sont absents au rang 0.

Trois échelles coexistent dans ce développement : les coordonnées  $x_1, x_2$  pour les termes  $u_{\text{plat,int}}^n$ , les variables semi-dilatées  $(t, \frac{s}{\varepsilon})$  pour la partie extérieure  $u_{\text{plat,ext}}^n$ , et enfin les variables dilatées dans les deux directions dans les profils, qui ne découplent pas l'intérieur de l'extérieur.

Le chapitre qui suit exploite les résultats du théorème 3.6 pour obtenir des estimations d'erreur dans les problèmes avec conditions d'impédance. On étudie en particulier l'influence de l'ouverture  $\omega$  sur l'ordre des conditions d'impédance habituelles.





## Chapitre 4

# Performance de la condition d'impédance pour un domaine à coin

### 4.1 Introduction

On a vu dans le chapitre 1 comment on pouvait déduire les conditions d'impédance à partir du développement asymptotique de la solution du problème de transmission dans le cas d'un domaine régulier. La structure du développement obtenu dans le chapitre 3 est plus complexe ; c'est pourquoi la démarche suivie au chapitre 1 ne peut pas être appliquée d'une manière directe.

L'objet de ce chapitre n'est pas de trouver de nouvelles conditions d'impédance tenant compte des singularités dues au coin dans le domaine. Il s'agit de reprendre la condition d'ordre 2 obtenue au chapitre 1 et d'en étudier la performance dans le cas où le domaine n'est plus régulier (condition de type Robin :  $(1 + \varepsilon \frac{c(x)}{2})v^\varepsilon + \alpha \varepsilon \partial_n v^\varepsilon = 0$ ). L'utilisation des résultats du chapitre précédent permet de préciser l'erreur commise en remplaçant le problème de transmission par le problème avec condition d'impédance.

Il ne s'agit pas seulement d'un problème académique car cette condition d'impédance est utilisée en présence de coins par les ingénieurs, sans qu'on en connaisse la précision réelle. Néanmoins, il a été remarqué qu'en présence de coins rentrants dans le domaine, la méthode n'est pas satisfaisante. C'est précisément ce point que l'on va illustrer et préciser dans ce chapitre.

On se place dans le cadre du chapitre précédent :  $\Omega_{\text{int}}$  présente un seul coin (en dehors

duquel le bord  $\Gamma$  de  $\Omega_{\text{int}}$  est une courbe régulière), le domaine  $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$  désigne une couche mince uniforme autour de  $\Omega_{\text{int}}$ . On rappelle que  $\Omega_{\text{int}}$  coïncide avec un secteur plan d'ouverture  $\omega$  au voisinage de  $O_{\text{int}}$ .

On s'intéresse au problème de transmission (3.1) que l'on rappelle ci-dessous. On suppose que le second membre  $f_{\text{ext}}$  et la donnée  $g$  sont nuls et que le second membre  $f_{\text{int}}$  est *plat* au voisinage du coin  $O_{\text{int}}$  (i.e.  $f_{\text{int}}$  est nulle en  $O_{\text{int}}$ , ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un certain ordre). Le problème est de la forme

$$(4.1) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon. \end{cases}$$

Précisément, on souhaite comparer la solution  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  du problème (4.1) avec  $v^\varepsilon$  qui résout le problème d'impédance :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ (1 + \varepsilon \frac{c(x)}{2}) v^\varepsilon + \alpha \varepsilon \partial_n v^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La technique qu'on va employer consiste à construire un développement asymptotique de  $v^\varepsilon$ , en utilisant les outils développés dans le chapitre 3. On compare ensuite ce développement avec celui de  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  pour déduire des estimations optimales pour la quantité  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$ .

Des simulations numériques ont été entreprises : on a calculé des approximations des solutions des problèmes (4.1) et (4.2) pour différentes valeurs de l'angle  $\omega$  et de l'épaisseur  $\varepsilon$ . Les résultats des calculs sont présentés en fin de chapitre (voir §4.4).

## 4.2 Développement asymptotique pour le problème avec impédance

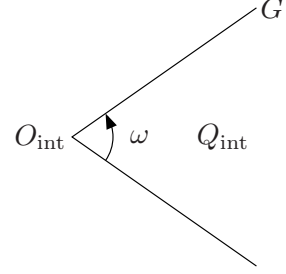
Dans cette partie, on énonce des résultats pour le problème avec impédance, similaires à ceux du chapitre 2 ; on ne donnera donc aucune démonstration ici.

### 4.2.1 Résolution dans le domaine modèle

Comme dans le chapitre 2, on introduit un domaine infini et un problème adimensionné qui modélisent le comportement au coin :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \alpha \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}_{\text{int}} & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathbf{v} + \alpha \partial_n \mathbf{v} = \mathbf{g} & \text{sur } G, \end{cases}$$

où  $Q_{\text{int}}$  est le secteur angulaire d'ouverture  $\omega$  et  $G$  son bord (voir figure ci-contre).



Le terme de courbure n'apparaît pas car  $\Gamma$  est supposé droit au voisinage de  $O_{\text{int}}$ .

L'espace variationnel associé au problème (4.3) est

$$\mathfrak{V} = \left\{ \mathbf{v} \mid \nabla \mathbf{v} \in L^2(Q_{\text{int}}) \text{ et } \mathbf{v} \in L^2(G) \right\},$$

muni de sa norme naturelle

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{V}}^2 = \|\nabla \mathbf{v}\|_{0, Q_{\text{int}}}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0, G}^2.$$

À l'aide du théorème de Lax-Milgram, on obtient immédiatement un résultat d'existence.

**Lemme 4.1** *Si  $(1+r)\mathbf{f}_{\text{int}} \in L^2(Q_{\text{int}})$  et  $\mathbf{g} \in L^2(G)$ , alors le problème (4.3) admet une solution variationnelle  $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}$  unique vérifiant pour tout  $\mathbf{q} \in \mathfrak{V}$ ,*

$$\alpha \int_{Q_{\text{int}}} \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{q} \, dx + \int_G \mathbf{v} \mathbf{q} \, d\sigma = - \int_{Q_{\text{int}}} \mathbf{f}_{\text{int}} \mathbf{q} \, dx + \int_G \mathbf{g} \mathbf{q} \, d\sigma.$$

( $r$  est la distance au coin  $O_{\text{int}}$ ).

On utilise la technique développée dans le chapitre 2 : développement sur-variationnel, régularité variationnelle dans les espaces à poids, développement sous-variationnel via la transformation de Mellin. Le résultat obtenu est de même nature. Soit le problème

$$(4.4) \quad \begin{cases} \alpha \Delta \mathbf{v} = 0 & \text{dans } Q_{\text{int}}, \\ \mathbf{v} + \alpha \partial_n \mathbf{v} = 0 & \text{sur } G, \\ \mathbf{v} \sim \mathfrak{s}^{\frac{k\pi}{\omega}} & \text{quand } r \rightarrow +\infty; \end{cases}$$

$\mathfrak{s}^{\frac{k\pi}{\omega}}$  désigne la singularité du problème de Dirichlet intérieur, définie en coordonnées polaires au coin

$$\mathfrak{s}^{\frac{k\pi}{\omega}}(r, \theta) = \begin{cases} r^{\frac{q\pi}{\omega}} \cos \frac{q\pi}{\omega} \theta & \text{si } q \text{ est impair,} \\ r^{\frac{q\pi}{\omega}} \sin \frac{q\pi}{\omega} \theta & \text{si } q \text{ est pair,} \end{cases} \quad \theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right).$$

Rappelons quelques définitions : l'espace homogène  $\mathfrak{S}^\mu(\check{Q})$  est donné par

$$\check{\mathbf{v}} \in \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}_{\text{int}}) \quad \text{ssi} \quad \check{\mathbf{v}} = r^\mu \sum_{\ell=0}^N \log^\ell r \, v_\ell(\theta),$$

les fonctions  $v_\ell$  sont régulières. Quant à l'ensemble des pôles  $\mathfrak{Q}_0^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^-$ , il est défini par

$$\mathfrak{Q}_0^\Lambda = \{\Lambda - q \mid q \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q}^- = \left\{ -\frac{h\pi}{\omega} - q \mid h, q \in \mathbb{N} \text{ avec } h > 0 \right\}.$$

**Théorème 4.2** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Lambda = \frac{k\pi}{\omega}$ . Il existe  $\mathfrak{Z}^\Lambda$  solution du problème (4.4) ci-dessus et des fonctions  $\mathfrak{Z}^{\Lambda, \mu} \in \mathcal{F}^* \left( \mathfrak{S}^\mu(\check{Q}_{\text{int}}) \right)$  telles que*

$$\mathfrak{Z}^\Lambda = \mathfrak{s}^\Lambda + \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{Q}_0^\Lambda \cup \mathfrak{Q}^- \\ -P \leq \mu < \Lambda}} \mathfrak{Z}^{\Lambda, \mu} + o\left(\frac{1}{r^P}\right) \quad (\forall P \in \mathbb{N}).$$

En outre, pour  $\mu > 0$  les termes  $\mathfrak{Z}^{\Lambda, \mu} = \mathcal{F}^*(\check{\mathfrak{Z}}^{\Lambda, \mu})$  sont construits par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathfrak{Z}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{Z}}^{\Lambda, \mu} = -\alpha \partial_n \check{\mathfrak{Z}}^{\Lambda, \mu+1} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

**Remarque.** Il n'est pas besoin, pour définir les profils  $\mathfrak{Z}^{\Lambda, \mu}$ , d'introduire la fonction  $\mathcal{F}^*$  car le domaine ne comporte pas de couche. Cependant on a conservé  $\mathcal{F}^*$  pour pouvoir comparer par la suite les profils  $\mathfrak{Z}^\Lambda$  et  $\mathfrak{K}_{\text{int}}^\Lambda$ .

## 4.2.2 Le développement asymptotique

En utilisant la méthode exposée dans le chapitre 3, on peut construire un développement asymptotique pour la solution de (4.2), dont la structure est similaire à celui de (4.1). Pour simplifier les énoncés, on se place dans le cas où la fonction  $f_{\text{int}}$  est plate au voisinage du coin.

**Théorème 4.3** *Soit  $N \geq 1$  et  $K > N$ . La solution  $v^\varepsilon$  du problème (4.2), pour un second membre  $f_{\text{int}}$  plat, admet le développement suivant*

$$(4.5) \quad v^\varepsilon = \sum_{0 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < N} d_q^\mu[\log \varepsilon] \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + q_\varepsilon^N.$$

La notation  $[\log \varepsilon]$  désigne une dépendance polynomiale en  $\log \varepsilon$  ; l'ensemble des indices  $\mu$  considérés est le suivant

$$\mathcal{U} = \{\mu = p \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \mu = \frac{h\pi}{\omega} + p \mid h, p \in \mathbb{N}, h \geq 2 \right\}.$$

Le terme  $v_{\text{plat}}^\mu$  est plat jusqu'à la dérivée d'ordre  $K - \lfloor \mu \rfloor$  au coin  $O_{\text{int}}$ . Enfin, on a l'estimation suivante pour le reste

$$(4.6) \quad \|q_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})} \leq c \varepsilon^N |\log \varepsilon|^{N-1} \|f_{\text{int}}\|_{H^N(\Omega_{\text{int}})}.$$

On peut préciser la construction des termes  $v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon]$  : ils consistent en la partie plate de  $v^\mu$ , défini par

$$(4.7) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v^\mu[\log \varepsilon] = \alpha \sum_{k < N-1} g^{k,\mu}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v^\mu[\log \varepsilon] = -\alpha \partial_n v_{\text{plat}}^{\mu-1}[\log \varepsilon] - \frac{c(x)}{2} v_{\text{plat}}^{\mu-1}[\log \varepsilon] & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où les termes  $g^{k,\mu}$  sont définis par la relation (4.9) plus bas.

$$v_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon] = v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} d_q^\mu[\log \varepsilon] \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(r, \theta) \text{ avec } v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] = \mathcal{O}(r^{K-\mu}).$$

On remplace alors les singularités  $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  du problème de Laplace intérieur par celles qui correspondent pour le problème d'impédance. Cela revient à ajouter le terme suivant au développement asymptotique :

$$(4.8) \quad \varepsilon^\mu z_\varepsilon^\mu = \chi \varepsilon^\mu \sum_{\frac{q\pi}{\omega} \leq K} d_q^\mu[\log \varepsilon] \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \left[ \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) - \mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \right],$$

( $\mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  est défini par le théorème 4.2). On peut développer en puissances de  $\varepsilon$  le Laplacien du terme de correction au coin : pour tout  $P \in \mathbb{N}$ ,

$$(4.9) \quad \sum_{N-1 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu \Delta z_\varepsilon^\mu = \sum_{\mu \in \mathcal{U}, \mu \geq N} \varepsilon^\mu g^{N,\mu}[\log \varepsilon] + g^{N(P)}(\varepsilon) \text{ avec } g^{N(P)}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^P).$$

### 4.3 Estimations optimales

On souhaite estimer la différence  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$ . Rappelons ici les deux développements asymptotiques obtenus respectivement dans les théorèmes 3.4 et 4.3.

$$u_{\text{int}}^\varepsilon = \sum_{0 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu u_{\text{plat,int}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < N} c_q^\mu[\log \varepsilon] \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + r_\varepsilon^N,$$

$$v^\varepsilon = \sum_{0 \leq \mu < N} \varepsilon^\mu v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < N} d_q^\mu[\log \varepsilon] \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + q_\varepsilon^N.$$

Nous allons étudier successivement les différences des profils ( $\mathfrak{K}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}$ ) et des parties plates ( $u_{\text{plat,int}}^\mu - v_{\text{plat}}^\mu$ ), en analysant précisément les problèmes qui les définissent. On pourra ensuite facilement en déduire une estimation globale de  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$  dans les normes  $L^2(\Omega_{\text{int}})$  et  $H^1(\Omega_{\text{int}})$ .

### 4.3.1 Étude des profils

Il s'agit ici d'étudier la différence  $\mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}$ . Comme ces profils interviennent dans la variable rapide  $\frac{r}{\varepsilon}$ , c'est leur comportement en l'infini qui importe.

**Proposition 4.4** *Pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , on a l'estimation asymptotique suivante*

$$\mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} = \mathcal{O}\left(r^{\max(\frac{q\pi}{\omega}-3, -\frac{\pi}{\omega})}\right) \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Il nous faut regarder de près les développements en l'infini des profils  $\mathfrak{K}^{\Lambda}$  et  $\mathfrak{Z}^{\Lambda}$  (obtenus dans les théorèmes 2.23 et 4.2) : on pose  $\Lambda = \frac{q\pi}{\omega}$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\Lambda} &= \mathfrak{s}^{\Lambda} + \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-1} + \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-2} + \dots + \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\Lambda, -\frac{\pi}{\omega}} + \dots \\ \mathfrak{Z}^{\Lambda} &= \underbrace{\mathfrak{s}^{\Lambda} + \mathfrak{Z}^{\Lambda, \Lambda-1} + \mathfrak{Z}^{\Lambda, \Lambda-2} + \dots}_{\text{algorithmique}} + \underbrace{\mathfrak{Z}^{\Lambda, -\frac{\pi}{\omega}} + \dots}_{\text{non-algorithmique}} \end{aligned}$$

Nous devons alors distinguer deux cas, selon que les termes de ces développements proviennent des pôles translatés de  $\Lambda$ , i.e. dans l'ensemble  $\mathfrak{Q}_0^{\Lambda}$ , ou qu'ils soient issus du noyau du symbole Mellin intérieur, c'est-à-dire dans  $\mathfrak{Q}^{-}$ . Les premiers sont construits à l'aide d'un procédé algorithmique, ce qui nous permettra de les comparer. En revanche, la définition de  $\mathfrak{K}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu}$ , pour  $\mu \in \mathfrak{Q}^{-}$ , n'utilise pas de découplage extérieur-intérieur, ce qui ôte tout espoir de faire un lien avec  $\mathfrak{Z}^{\Lambda, \mu}$ .

- Cas  $\mu \in \mathfrak{Q}_0^{\Lambda}$ .

Écrivons les problèmes qui définissent  $\mathfrak{K}^{\Lambda, \mu}$  :

$$(4.10) \quad \begin{cases} \partial_{\theta}^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = -\partial_r^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu+2} & \theta \in \pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1), \\ \partial_{\theta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = \frac{\alpha}{r} \partial_{\theta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu+1} & \theta = \pm\frac{\omega}{2}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \theta = \pm\frac{\omega}{2} \pm 1, \end{cases}$$

(avec les conventions  $\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda+1} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda+2} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda+1} = 0$ ) et

$$(4.11) \quad \begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu} & \text{pour } \theta = \pm\frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

De la même façon, les profils  $\mathfrak{Z}^{\Lambda, \mu}$  sont définis par

$$(4.12) \quad \begin{cases} \check{\Delta} \check{\mathfrak{Z}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = 0 & \text{dans } \check{Q}_{\text{int}}, \\ \check{\mathfrak{Z}}_{\text{int}}^{\Lambda, \mu} = -\alpha \partial_n \check{\mathfrak{Z}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu+1} & \text{pour } \theta = \pm \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

Il est facile de voir, à partir des problèmes (4.10) et (4.11), que

$$\check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-1} = 0 \quad \text{et} \quad \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \Lambda-2} = \pm \alpha \partial_n \check{\mathfrak{K}}_{\text{int}}^{\Lambda, \Lambda-1} (\theta \mp \frac{\omega}{2} \mp 1),$$

si bien que les problèmes (4.11) et (4.12) sont identiques pour  $\mu = \Lambda - 1$  et  $\mu = \Lambda - 2$ . En revanche, une différence apparaît pour  $\mu = \Lambda - 3$  à cause du terme  $-\partial_r^2 \check{\mathfrak{K}}_{\text{ext}}^{\Lambda, \mu+2}$  dans le problème (4.10). Cette étude fournit le terme limitant  $r^{\Lambda-3}$ .

- Cas  $\mu \in \mathfrak{Q}^-$ . Tous les termes de ce type font partie du reste. Le premier terme limitant a un comportement en l'infini régi par  $r^{-\frac{\pi}{\omega}}$ , si bien que cette puissance limite le reste.

On obtient ainsi le résultat annoncé. ■

### 4.3.2 Étude des termes plats

**Proposition 4.5** *Pour  $0 \leq \mu < \min(3, \frac{2\pi}{\omega})$ , les termes  $u_{\text{plat}, \text{int}}^{\mu}[\log \varepsilon]$  et  $v_{\text{plat}}^{\mu}[\log \varepsilon]$  coïncident.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire les problèmes vérifiés par les termes plats.

- Pour  $\mu = 0$ ,  $u_{\text{plat}, \text{int}}^0$  est la partie régulière de la solution du problème de Laplace dans  $\Omega_{\text{int}}$  avec conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^0 = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^0 = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad u_{\text{int}}^0 = u_{\text{plat}, \text{int}}^0 + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} c_q^0 \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(r, \theta).$$

Le terme  $v^0$  résout exactement le même problème, si bien que les parties plates  $u_{\text{plat}, \text{int}}^0$  et  $v_{\text{plat}}^0$  sont les mêmes.

- Pour  $\mu = 1$ , on a vu au chapitre 3 que  $u_{\text{int}}^1[\log \varepsilon]$  était défini par

$$(4.13) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^1[\log \varepsilon] = f_{\text{int}}^{0,1}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^1[\log \varepsilon] = U_{\text{plat}, \text{ext}}^1 & \\ = -\alpha \partial_n u_{\text{plat}, \text{int}}^0|_{\Gamma} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

la donnée  $f_{\text{int}}^{0,1}$  est due au développement du terme  $\Delta k_{\varepsilon, \text{int}}^0$  qui provient de l'introduction des profils  $\mathfrak{K}_{\omega}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  :

$$k_{\varepsilon, \text{int}}^0 = \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \left[ \mathfrak{K}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) - \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \right],$$



$$\Delta k_\varepsilon^0 = \varepsilon f^{0,1} + \varepsilon^{\frac{2\pi}{\omega}} f^{0,\frac{2\pi}{\omega}} + \varepsilon^2 f^{0,2} + \dots$$

Quant au terme  $v^1[\log \varepsilon]$ , il est solution du problème – voir (4.7)

$$(4.14) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v^1[\log \varepsilon] = g^{0,1}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v^1[\log \varepsilon] = -\alpha \underbrace{\partial_n v_{\text{plat}}^0|_\Gamma}_{= \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_\Gamma} - \frac{c(x)}{2} \underbrace{v_{\text{plat}}^0|_\Gamma}_{= 0} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

le second membre  $g^{0,1}$  est le début du développement de  $\Delta z_\varepsilon^0$ ,  $z_\varepsilon^0$  étant défini par

$$z_\varepsilon^0 = \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} c_q^0 \varepsilon^{\frac{q\pi}{\omega}} \left[ \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) - \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right],$$

$$\Delta z_\varepsilon^0 = \varepsilon g^{0,1} + \varepsilon^{\frac{2\pi}{\omega}} g^{0,\frac{2\pi}{\omega}} + \varepsilon^2 g^{0,2} + \dots$$

De manière analogue au lemme 3.2, les termes  $g^{0,1}$  et  $g^{0,2}$  ne dépendent que de  $\mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}, \frac{q\pi}{\omega}-1}$  et  $\mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}, \frac{q\pi}{\omega}-2}$ . On a vu plus haut que ces derniers coïncidaient avec  $\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}, \frac{q\pi}{\omega}-1}$  et  $\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}, \frac{q\pi}{\omega}-2}$ . On en déduit que

$$f^{0,1} = g^{0,1} \quad \text{et} \quad f^{0,2} = g^{0,2}.$$

Les problèmes (4.13) et (4.14) sont donc identiques ; ainsi  $u_{\text{plat,int}}^1[\log \varepsilon] = v_{\text{plat}}^1[\log \varepsilon]$ .

- Pour  $\mu = \frac{2\pi}{\omega}$ , les termes  $u_{\text{int}}^\mu[\log \varepsilon]$  et  $v^\mu[\log \varepsilon]$  sont génériquement différents, car les seconds membres  $f_{\text{int}}^{0,\frac{2\pi}{\omega}}$  et  $g^{0,\frac{2\pi}{\omega}}$  sont a priori distincts.
- Pour  $\mu = 2$ , les termes  $u_{\text{int}}^2$  et  $v^2$  sont égaux. En effet il suffit d'écrire les problèmes qui les définissent.

$$(4.15) \quad \begin{cases} \alpha \Delta u_{\text{int}}^2[\log \varepsilon] = f_{\text{int}}^{1,1}[\log \varepsilon] + f_{\text{int}}^{0,2}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ u_{\text{int}}^2[\log \varepsilon] = U_{\text{plat,ext}}^2 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où le terme extérieur est donné par (voir proposition 3.3) :

$$U_{\text{plat,ext}}^2|_\Gamma = -\alpha \partial_n u_{\text{plat,int}}^1|_\Gamma + \frac{c(x)}{2} \partial_n u_{\text{plat,int}}^0|_\Gamma.$$

Quant à  $v^2$ , il est solution de – voir (4.7)

$$(4.16) \quad \begin{cases} \alpha \Delta v^2[\log \varepsilon] = g_{\text{int}}^{1,1}[\log \varepsilon] + g_{\text{int}}^{0,2}[\log \varepsilon] & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ v^2[\log \varepsilon] = -\alpha \partial_n v_{\text{plat}}^1[\log \varepsilon] - \frac{c(x)}{2} v_{\text{plat}}^1[\log \varepsilon] & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec

$$v_{\text{plat}}^1[\log \varepsilon]|_\Gamma = -\alpha \partial_n v_{\text{plat}}^0|_\Gamma.$$

On a vu plus haut que  $f^{0,2} = g^{0,2}$  et on peut montrer de même que  $f^{1,1} = g^{1,1}$ . En outre  $u_{\text{plat,int}}^0 = v_{\text{plat}}^0$  et  $u_{\text{plat,int}}^1[\log \varepsilon] = v_{\text{plat}}^1[\log \varepsilon]$ , ce qui prouve que les problèmes (4.15) et (4.16) sont identiques. Les termes  $u_{\text{int}}^2[\log \varepsilon]$  et  $v^2[\log \varepsilon]$  coïncident, leurs parties plates sont donc elles aussi égales.

• Enfin  $u_{\text{int}}^3 \neq v^3$  (génériquement) car apparaît une contribution a priori non nulle de la partie non principale du Laplacien dans la partie extérieure de  $u^3$ , qui n'a pas d'équivalent pour le problème avec impédance.

On obtient bien ainsi le résultat annoncé.  $\blacksquare$

**Remarque.** Si  $\frac{2\pi}{\omega} \geq 3$ , l'énoncé de la proposition 4.5 rejoint les résultats du chapitre 1, où la géométrie est régulière.

### 4.3.3 Estimations d'erreur

**Théorème 4.6** *On a les estimations suivantes entre la solution intérieure  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  du problème de transmission (4.1) et la solution  $v^\varepsilon$  du problème avec condition d'impédance (4.2) :*

$$(4.17) \quad \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{0,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 1 + \frac{\pi}{\omega}, 3)},$$

$$(4.18) \quad \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{\pi}{\omega}, 3)}.$$

La notation  $[\log \varepsilon]$  désigne une dépendance polynomiale en  $\log \varepsilon$ .

DÉMONSTRATION. Les développements asymptotiques de  $u_{\text{int}}^\varepsilon$  et  $v^\varepsilon$  s'écrivent

$$\begin{aligned} u_{\text{int}}^\varepsilon &= \sum_{0 \leq \mu < 3} \varepsilon^\mu u_{\text{plat,int}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < 3} c_q^\mu[\log \varepsilon] \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3[\log \varepsilon]), \\ v^\varepsilon &= \sum_{0 \leq \mu < 3} \varepsilon^\mu v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] + \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < 3} d_q^\mu[\log \varepsilon] \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \mathfrak{I}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3[\log \varepsilon]). \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 4.5,  $u_{\text{int}}^\mu = v^\mu$  pour  $\mu < \min(\frac{2\pi}{\omega}, 3)$ . On peut donc affirmer que, pour  $s = 0, 1$ ,

$$(4.19) \quad \left\| \sum_{0 \leq \mu < 3} \varepsilon^\mu u_{\text{plat,int}}^\mu[\log \varepsilon] - \sum_{0 \leq \mu < 3} \varepsilon^\mu v_{\text{plat}}^\mu[\log \varepsilon] \right\|_{s,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 3)}.$$

Il reste à étudier la partie des profils pour laquelle deux cas doivent être distingués.

• Si  $\mu < \min(\frac{2\pi}{\omega}, 3)$ , alors les coefficients de singularité  $c_q^\mu[\log \varepsilon]$  et  $d_q^\mu[\log \varepsilon]$  coïncident (car  $u_{\text{int}}^\mu = v^\mu$ ). On considère donc la différence

$$(4.20) \quad \Xi(\varepsilon) = \chi \sum_{\frac{q\pi}{\omega} < K} \sum_{0 \leq \mu < 3} \varepsilon^{\mu + \frac{q\pi}{\omega}} \underbrace{\left[ c_q^\mu [\log \varepsilon] \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - d_q^\mu [\log \varepsilon] \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right]}_{= c_q^\mu [\log \varepsilon] (\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}})} \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right).$$

Il s'agit alors d'estimer  $\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}$  : la proposition 4.4 permet d'écrire

$$\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} = \mathcal{O} \left( r^{\max(\frac{q\pi}{\omega} - 3, -\frac{\pi}{\omega})} \right),$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| \chi \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}, \theta \right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 &\approx \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\tau_1} \left( \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right)^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \varepsilon^2 \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\frac{\tau_1}{\varepsilon}} \left( \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] (R, \theta) \right)^2 R \, dR \, d\theta. \end{aligned}$$

Or  $\left( \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] (R, \theta) \right)^2 R \sim R^\beta$ , avec  $\beta = 2 \max(\frac{q\pi}{\omega} - 3, -\frac{\pi}{\omega}) + 1$ .

– Si  $\beta < -1$ , c'est-à-dire si  $q = 1$  et  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ , alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} R^\beta \, dR$  converge, donc

$$\left\| \chi \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}, \theta \right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 \approx \varepsilon^2.$$

– Sinon l'intégrale diverge et

$$\left\| \chi \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}, \theta \right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 \approx \varepsilon^{1-\beta} = \varepsilon^{2 \min(3 - \frac{q\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})}.$$

On peut donc conclure quant à l'ordre de grandeur de la somme  $\Xi(\varepsilon)$  (en norme  $L^2$ ) : les termes du type  $\beta < -1$  sont en

$$\mathcal{O} \left( \varepsilon^{1 + \frac{\pi}{\omega} + \mu} \right);$$

ceux qui correspondent à  $\beta \geq -1$  sont d'ordre

$$\mathcal{O} \left( \varepsilon^{\min(3 + \mu, \frac{(q+1)\pi}{\omega} + \mu)} \right).$$

Le premier terme limitant correspond à  $q = 1$  et  $\mu = 0$  d'où l'estimation en norme  $L^2$  :

$$\|\Xi(\varepsilon)\|_{0, \Omega_{\text{int}}} = \mathcal{O} \left( \varepsilon^{\min(3, \frac{2\pi}{\omega}, 1 + \frac{\pi}{\omega})} \right).$$

Pour obtenir le résultat en norme  $H^1$ , on doit estimer la norme

$$\left\| \chi \nabla \left( \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right) \left( \frac{\cdot}{\varepsilon}, \theta \right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 \approx \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\frac{\tau_0}{\varepsilon}} \left| \nabla \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] (R, \theta) \right|^2 R \, dR \, d\theta.$$

La technique est la même que pour les normes  $L^2$  :

$$\left| \left[ \nabla \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} - \nabla \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] (R, \theta) \right|^2 R \sim R^{\beta-2},$$

On distingue encore deux cas, selon que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} R^{\beta-2} dR$  converge ou non. On obtient

$$\|\nabla \Xi(\varepsilon)\|_{0, \Omega_{\text{int}}} = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\min(3, \frac{\pi}{\omega})}\right).$$

- Si  $\mu \geq \min(\frac{2\pi}{\omega}, 3)$ , il s'agit ici d'estimer indépendamment les profils  $\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}(\frac{\cdot}{\varepsilon})$  et  $\mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}(\frac{\cdot}{\varepsilon})$  pour  $r < \tau_1$  (car on a tronqué à l'aide de  $\chi$ ).

$$\left\| \chi \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 \approx \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\tau_1} \left\| \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{r}{\varepsilon}, \theta\right) \right\|^2 r dr d\theta = \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\frac{\tau_1}{\varepsilon}} \left\| \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}(R, \theta) \right\|^2 \varepsilon^2 R dR d\theta,$$

Comme

$$\mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}(R, \theta) \sim \mathfrak{Z}^{\frac{q\pi}{\omega}}(R, \theta) \sim \mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}(R, \theta) = R^{\frac{q\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{q\pi}{\omega}, \theta\right) \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty,$$

et comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} R^{2\frac{q\pi}{\omega}} R dR$  diverge,

$$\left\| \chi \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 \approx \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\tau_1}{\varepsilon}} R^{2\frac{q\pi}{\omega}} R dR \approx \varepsilon^{-2\frac{q\pi}{\omega}}.$$

Ainsi les termes qui apparaissent dans la somme (4.20) et qui correspondent à des coefficients de singularité différents (i.e.  $\mu \geq \min(\frac{2\pi}{\omega}, 3)$ ) sont de l'ordre, en norme  $L^2$  :

$$\varepsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 3) + \frac{q\pi}{\omega} - \frac{q\pi}{\omega}} = \varepsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 3)}.$$

Les mêmes calculs peuvent être poursuivis pour la norme  $H^1$  :

$$\begin{aligned} \left\| \chi \nabla \left[ \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right] \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 &\approx \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\tau_1} \left| \varepsilon^{-1} \left[ \nabla \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} \right] \left( \frac{r}{\varepsilon}, \theta \right) \right|^2 r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \int_0^{\frac{\tau_1}{\varepsilon}} \left| \nabla \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}(R, \theta) \right|^2 R dR d\theta, \end{aligned}$$

Or  $\nabla \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}} \approx R^{\frac{q\pi}{\omega}-1}$ , donc

$$\left\| \chi \nabla \mathfrak{R}_{\text{int}}^{\frac{q\pi}{\omega}}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{0, \Omega_{\text{int}}}^2 \approx \int_0^{\frac{\tau_1}{\varepsilon}} R^{2\frac{q\pi}{\omega}-2} R dR \approx \varepsilon^{-2\frac{q\pi}{\omega}}.$$

On a donc la même estimation qu'en norme  $L^2$ .

En conclusion, on a les estimations suivantes pour la partie des profils :

$$\|\Xi(\varepsilon)\|_{0,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{2\pi}{\omega}, 1 + \frac{\pi}{\omega}, 3)} ;$$

$$\|\Xi(\varepsilon)\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\min(\frac{\pi}{\omega}, 3)}.$$

Combinées à l'estimation des parties plates (4.19), elles fournissent le résultat annoncé. ■

**Remarque.** Les estimations obtenues dans le théorème 4.6 coïncident avec celles du chapitre 1 quand  $\omega < \frac{\pi}{3}$ . Cela signifie que pour des angles petits, la condition d'impédance est aussi performante que dans le cas d'une géométrie régulière. À l'inverse, son efficacité se dégrade sérieusement pour des angles rentrants. En effet, quand  $\omega$  est proche de  $2\pi$ , les estimations deviennent

$$\|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{0,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\frac{2\pi}{\omega}} \approx \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}} \approx \sqrt{\varepsilon}.$$

On peut préciser les termes qui produisent ces erreurs. Un examen attentif des démonstrations des paragraphes précédents montre que les termes limitants sont dus à la différence de  $\mathfrak{K}^{\Lambda, -\frac{\pi}{\omega}}$  et  $\mathfrak{Z}^{\Lambda, -\frac{\pi}{\omega}}$ . Il s'agit des premiers termes définis de manière non-algorithmique dans le développement des profils ; ils contiennent une information intrinsèque à chaque problème.

## 4.4 Résultats numériques

Le but de cette partie est de mettre en évidence numériquement les résultats du paragraphe précédent : on souhaite comparer la solution du problème de transmission avec celle du problème avec condition d'impédance pour illustrer les estimations du théorème 4.6.

### 4.4.1 Le problème

On s'intéresse aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \Delta u_{\text{int}}^\varepsilon = f_{\text{int}} & \text{dans } \Omega_{\text{int}}, \\ \Delta u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ u_{\text{int}}^\varepsilon = u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha \partial_n u_{\text{int}}^\varepsilon = \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \\ u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon, \\ \partial_n u_{\text{ext}}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

posées dans le domaine  $\Omega^\varepsilon$ , représenté sur la figure 4.1. Les données  $g$  et  $f_{\text{ext}}$  sont nulles et on suppose  $f_{\text{int}}$  plate au voisinage du coin  $O_{\text{int}}$ . Précisément, on a pris, pour les calculs, une fonction  $f_{\text{int}}$  à support compact dans  $\Omega_{\text{int}}$  :

$$f_{\text{int}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que le domaine considéré ne rentre pas *stricto sensu* dans la catégorie considérée jusqu'ici. En effet plusieurs coins sont présents dans  $\Omega^\varepsilon$  et la couche mince ne recouvre qu'une partie du bord de  $\Omega_{\text{int}}$ . Cependant comme les angles entre les demi-droites définissant  $\Gamma$  et  $\Gamma_N$  sont droits et la condition imposée est de type Neumann, le principe de réflexion permet donc d'affirmer qu'aucune singularité ne sera excitée dans ces coins. L'étude qui précède s'applique donc car la seule singularité au voisinage de la couche mince se situe au coin intérieur (la singularité due au coin  $(0,0)$  n'interfère pas avec la couche mince).

C'est dans un but de simplicité qu'on a utilisé un domaine polygonal pour les simulations numériques, facilitant ainsi sensiblement l'opération de maillage (l'influence d'une courbure non nulle a été illustrée au chapitre 1). La condition d'impédance d'ordre 2 coïncide donc, dans ce cas, avec la condition d'ordre 1.

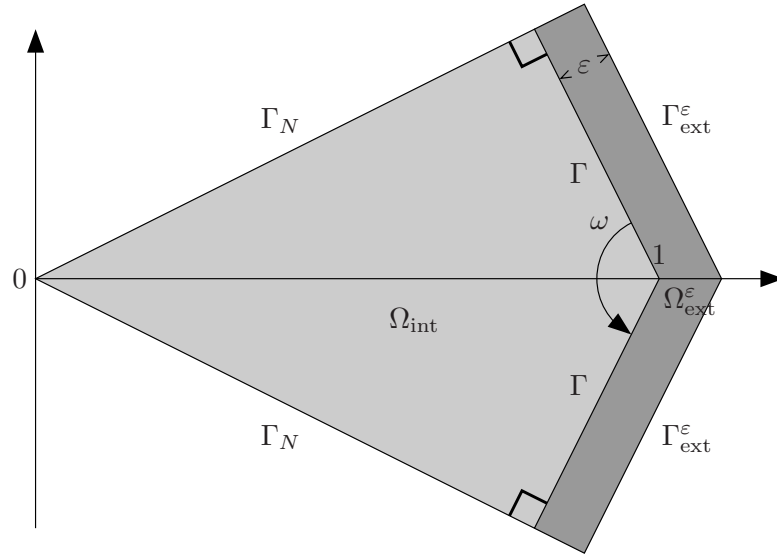


FIG. 4.1 – Le domaine  $\Omega^\varepsilon$  utilisé pour les calculs.

### 4.4.2 La méthode numérique

Afin de mettre en évidence les estimations du théorème 4.6, il nous faut calculer d'une part la solution du problème de transmission et, d'autre part, la solution du problème avec condition d'impédance. Soient donc  $u^\varepsilon$  et  $v^\varepsilon$  les solutions des problèmes variationnels suivants

$$\alpha \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla u_{\text{int}}^\varepsilon \nabla \varphi_{\text{int}} \, dx + \int_{\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon} \nabla u_{\text{ext}}^\varepsilon \nabla \varphi_{\text{ext}} \, dx = - \int_{\Omega_{\text{int}}} f_{\text{int}} \nabla \varphi_{\text{int}} \, dx,$$

$$\alpha \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla v^\varepsilon \nabla \varphi \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} v^\varepsilon \varphi \, d\sigma = - \int_{\Omega_{\text{int}}} f_{\text{int}} \nabla \varphi \, dx.$$

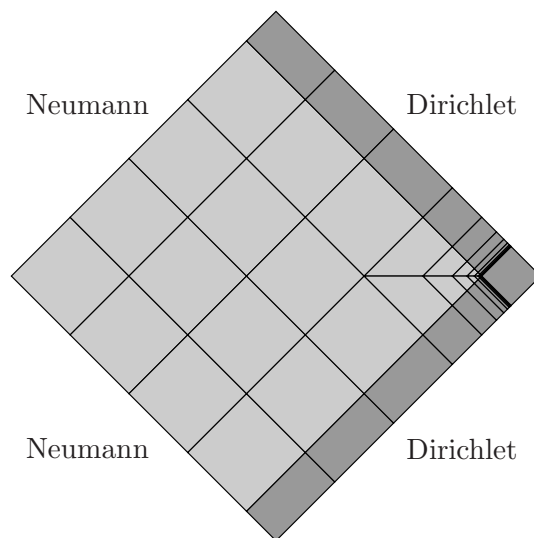
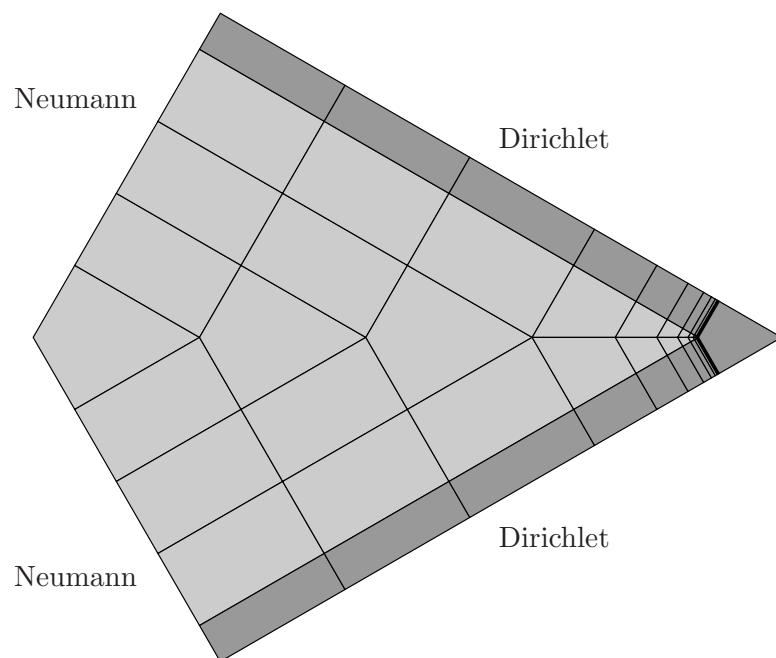
Pour construire une approximation de  $u^\varepsilon$ , on doit discrétiser le domaine  $\Omega^\varepsilon$  tout entier, couche mince comprise. L'épaisseur  $\varepsilon$  pouvant prendre des valeurs très petites, c'est un problème coûteux : c'est justement pour cela qu'on essaie de trouver des conditions d'impédance qui remplacent l'effet de la couche mince. On a choisi d'utiliser des éléments finis anisotropes dans la couche afin d'en limiter le nombre, et une interpolation de degré élevé ( $\mathbb{Q}_6$  en l'occurrence). On avait déjà rencontré cette difficulté dans le chapitre 1 pour une géométrie régulière.

La présence du coin d'ouverture  $\omega$  dans le domaine  $\Omega_{\text{int}}$  donne naissance à des singularités dans la solution, et ce défaut de régularité a aussi des conséquences du point de vue numérique (l'approximation de la solution est alors moins bonne). La combinaison d'un raffinement de maillage géométrique (la taille des éléments successifs est divisée par 2 quand on se rapproche du coin) et d'une interpolation d'ordre élevé permet néanmoins d'approcher très précisément la partie singulière de la solution.

Les figures 4.2-4.5 qui suivent représentent quelques-uns des maillages utilisés dans les calculs, pour différentes valeurs de l'angle  $\omega$ . On a choisi une valeur de  $\varepsilon$  assez élevée afin que la couche mince apparaisse clairement sur les dessins.

Ajoutons que tous les calculs (aussi bien la définition du maillage que les calculs éléments finis) doivent être effectués en double précision car la différence  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$ , qui est l'objet de notre étude, devient très petite quand  $\varepsilon$  est faible.

Le nombre de degrés de liberté (taille du système linéaire à résoudre) est de 2011 pour les angles convexes (maillages en 53 éléments) et de 4177 pour les maillages concaves (comprenant 112 éléments).

FIG. 4.2 – *Maillage pour  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .*FIG. 4.3 – *Maillage pour  $\omega = \frac{\pi}{3}$ .*



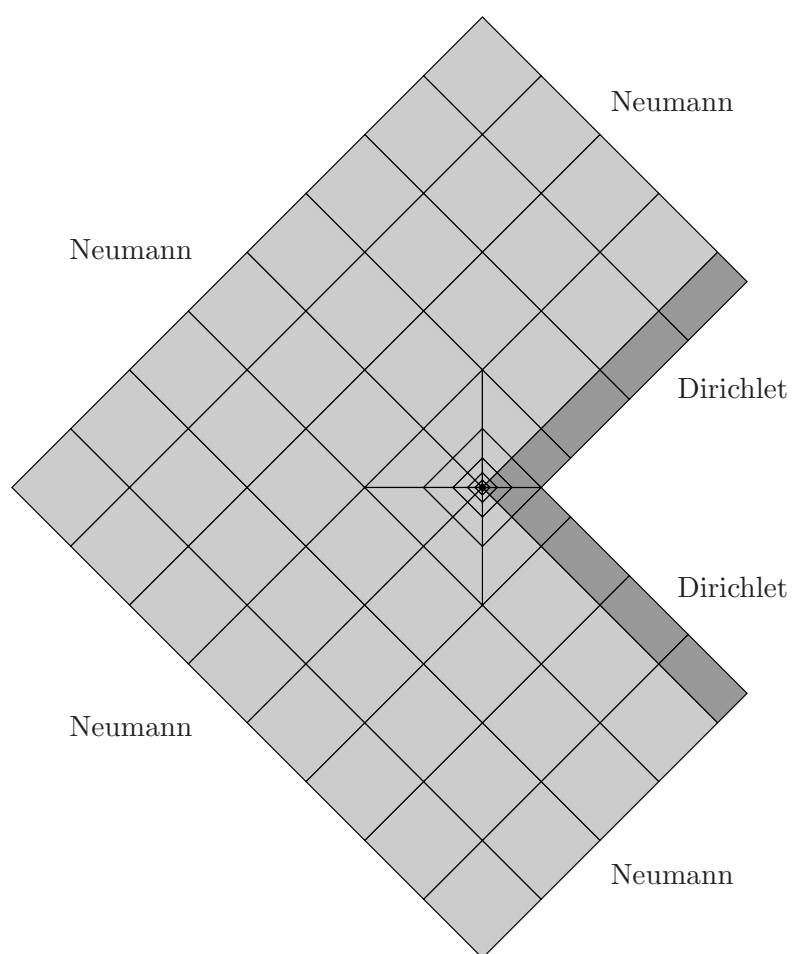
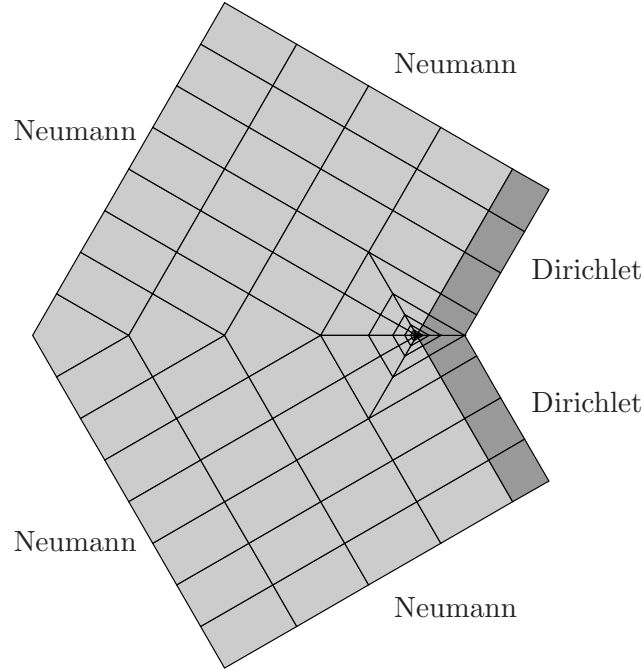


FIG. 4.4 – *Maillage pour  $\omega = \frac{3\pi}{2}$ .*

FIG. 4.5 – *Maillage pour  $\omega = \frac{5\pi}{4}$ .*

#### 4.4.3 Résultats des calculs

La mise en œuvre des méthodes numériques a été faite à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis MÉLINA (voir [23]). Ce travail a nécessité le développement d'outils incorporés actuellement au code ; des détails sont donnés en annexe.

##### Résultats pour $\omega = \frac{\pi}{2}$

On utilise une famille de maillages du type de celui de la figure 4.2, en faisant varier l'épaisseur  $\varepsilon$  de la couche mince. Précisément,

$$\varepsilon = 2^{-j}, \quad j = 1, \dots, 15.$$

La figure 4.6 représente, en coordonnées logarithmiques, la norme  $L^2$  de la différence  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$ . L'estimation (4.17) s'écrit, dans le cas  $\omega = \frac{\pi}{2}$  :

$$\|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{0, \Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^3.$$

La droite obtenue sur le graphe 4.6 est de pente voisine de 3, ce qui est en accord avec l'estimation précédente.

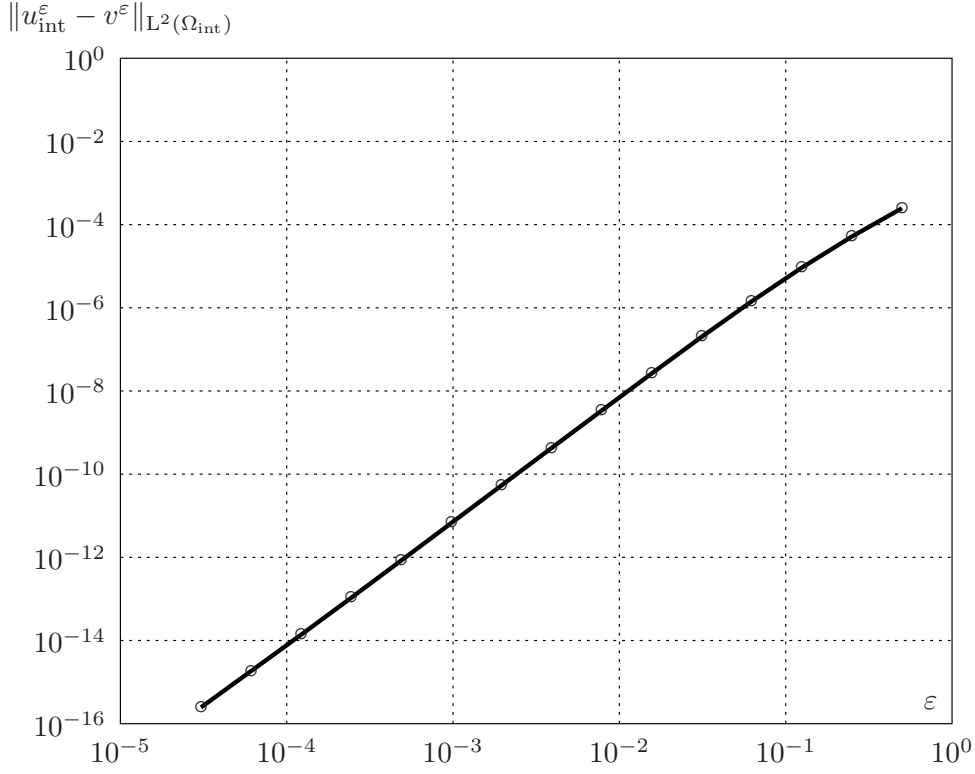


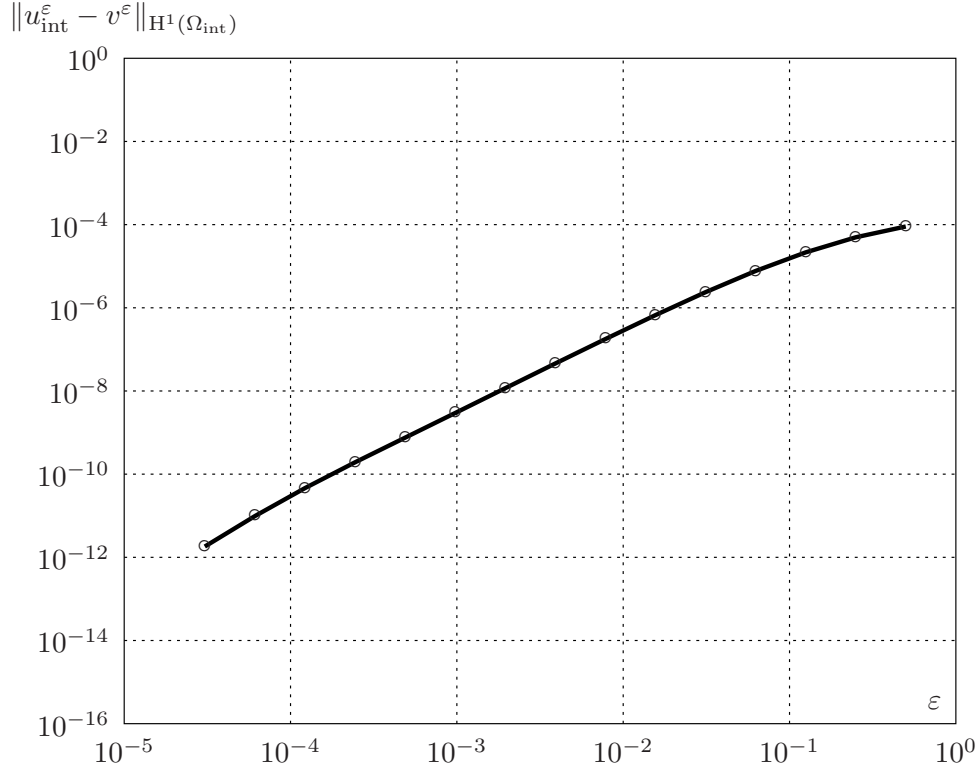
FIG. 4.6 – Résultats en norme  $L^2$  pour  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

Ces résultats justifient l'utilisation d'une méthode précise d'approximation, puisque les erreurs sont voisines de  $10^{-16}$  pour les plus petites valeurs de  $\varepsilon$ .

La figure 4.7 résume les résultats en norme  $H^1$  : la pente de la droite obtenue est voisine de 2 et l'estimation (4.18) fournit

$$\|u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{1,\Omega_{\text{int}}} \leq C[\log \varepsilon] \varepsilon^2.$$

L'éventuelle présence de termes en  $\log \varepsilon$  ne peut pas être mise en évidence par le calcul, car leur effet est négligeable devant toute puissance de  $\varepsilon$ .

FIG. 4.7 – Résultats en norme  $H^1$  pour  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

### Calculs pour différentes valeurs de $\omega$

Afin d'étudier la dépendance de la différence  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$  en fonction de l'angle  $\omega$ , on a effectué les mêmes calculs que pour  $\omega = \frac{\pi}{2}$  ; la figure 4.8 représente, en coordonnées logarithmiques les résultats obtenus pour les valeurs suivantes de  $\omega$  (tant convexes que concaves) :

$$\omega = \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{8\pi}{7}, \frac{4\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}.$$

Les tableaux 4.9 et 4.10 donnent les pentes calculées à partir des courbes 4.8 ; on a écrit en caractères penchés la ligne qui est retenue comme valeur de la pente moyenne. En effet, les valeurs les plus de  $\varepsilon$  correspondent à un comportement pré-asymptotique et la valeur n'a pas de rapport avec la pente théorique issue du théorème 4.6. D'autre part, les valeurs trop petites de  $\varepsilon$  conduisent à des erreurs  $u_{\text{int}}^\varepsilon - v^\varepsilon$  tellement faibles que l'erreur de discrétisation peut interférer. C'est aussi la raison pour laquelle on a préféré faire figurer les pentes successives plutôt qu'une pente moyenne. On retiendra la valeur des pentes au voisinage de  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  pour estimer les ordres de convergence.

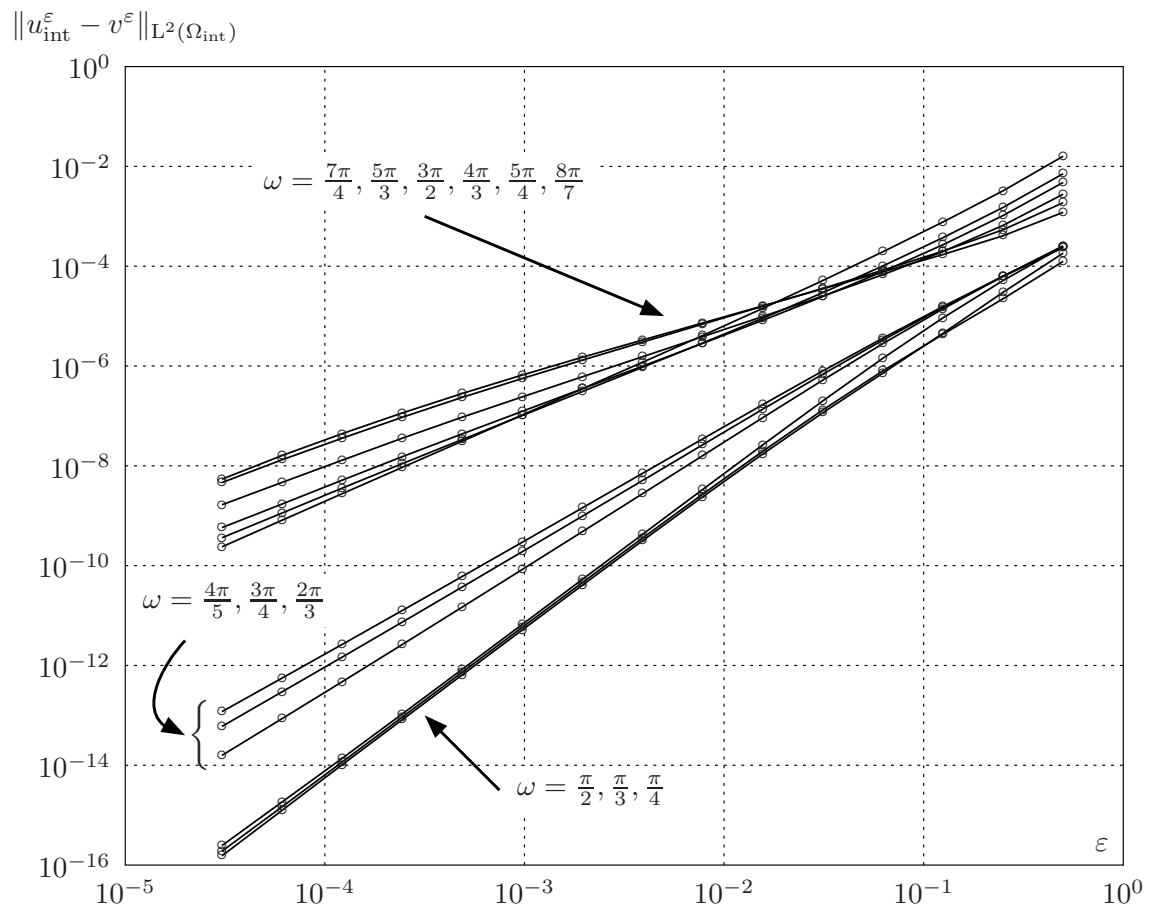


FIG. 4.8 – Résultats en norme  $L^2$  pour différentes valeurs de  $\omega$ .

Chaque courbe correspond à une valeur de  $\omega$ .

$\varepsilon$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{7}$
$0.707E + 00$	1.562	1.801	2.076	2.203	2.245	2.300
$0.354E + 00$	1.245	1.425	1.741	1.945	2.013	2.077
$0.177E + 00$	1.155	1.266	1.541	1.785	1.883	1.982
$0.884E - 01$	1.135	1.209	1.423	1.664	1.780	1.914
$0.442E - 01$	1.133	1.194	1.365	1.582	1.700	1.855
$0.221E - 01$	1.135	1.192	1.342	1.536	1.648	1.808
$0.110E - 01$	1.138	1.194	1.334	1.513	1.620	1.776
$0.552E - 02$	<i>1.141</i>	<i>1.197</i>	<i>1.332</i>	<i>1.503</i>	<i>1.606</i>	<i>1.759</i>
$0.276E - 02$	1.185	1.223	1.339	1.500	1.600	1.750
$0.138E - 02$	1.229	1.257	1.352	1.503	1.599	1.746
$0.691E - 03$	1.300	1.328	1.402	1.521	1.606	1.746
$0.345E - 03$	1.376	1.394	1.464	1.565	1.632	1.751
$0.173E - 03$	1.455	1.434	1.478	1.587	1.659	1.766
$0.863E - 04$	1.574	1.514	1.491	1.569	1.645	1.771

FIG. 4.9 – *Pentes calculées sur le graphe 4.8 (angles concaves).***Remarques.**

- La valeur de  $\varepsilon$  de la première colonne correspond à la moyenne géométrique des valeurs utilisées pour calculer la pente.
- La ligne en caractères penchés est conservée comme estimation de la pente moyenne.

$\varepsilon$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$0.707E + 00$	1.909	1.947	2.024	2.260	2.606	2.489
$0.354E + 00$	2.016	2.067	2.173	2.484	2.728	2.361
$0.177E + 00$	2.104	2.173	2.312	2.688	2.651	2.435
$0.884E - 01$	2.183	2.268	2.429	2.841	2.638	2.603
$0.442E - 01$	2.245	2.335	2.501	2.929	2.746	2.751
$0.221E - 01$	2.281	2.368	2.529	2.969	2.851	2.855
$0.110E - 01$	2.294	2.376	2.531	2.985	2.919	2.921
$0.552E - 02$	2.293	2.371	2.523	2.992	2.958	2.959
$0.276E - 02$	2.287	2.362	2.515	2.995	2.979	2.979
$0.138E - 02$	2.280	2.353	2.508	2.993	2.989	2.989
$0.691E - 03$	2.271	2.343	2.496	2.980	2.994	2.995
$0.345E - 03$	2.258	2.327	2.477	2.950	2.995	2.990
$0.173E - 03$	2.240	2.309	2.457	2.906	3.035	2.978
$0.863E - 04$	2.233	2.304	2.441	2.899	3.028	2.956

FIG. 4.10 – *Pentes calculées sur le graphe 4.8 (angles convexes).***Remarques.**

- La valeur de  $\varepsilon$  de la première colonne correspond à la moyenne géométrique des valeurs utilisées pour calculer la pente.
- La ligne en caractères penchés est conservée comme estimation de la pente moyenne.

Le graphe 4.11 représente les résultats obtenus en norme  $H^1$ , et les tableaux 4.12 et 4.13 présentent les pentes successives calculées à partir des courbes 4.11.

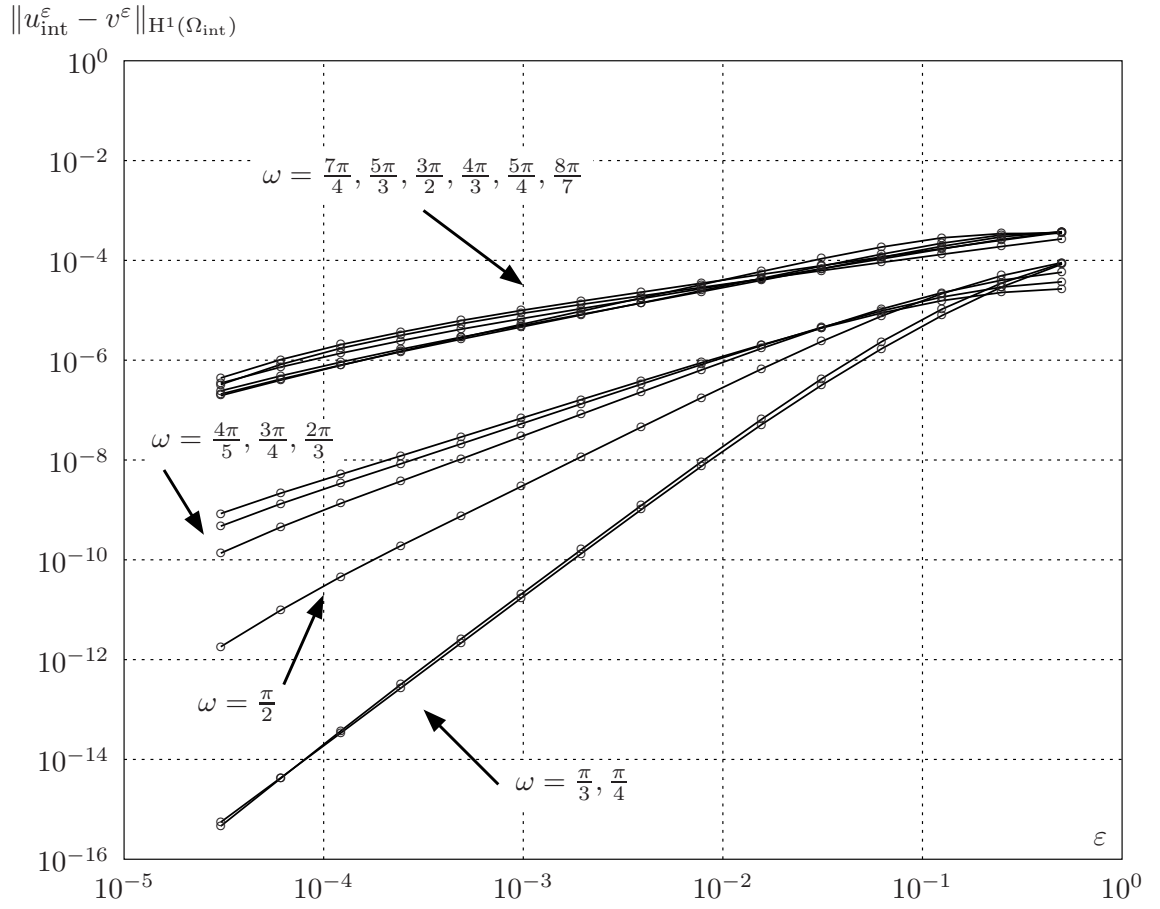


FIG. 4.11 – Résultats en norme  $H^1$  pour différentes valeurs de  $\omega$ .

Chaque courbe correspond à une valeur de  $\omega$ .



$\varepsilon$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{7}$
$0.707E + 00$	0.502	0.532	0.515	0.334	0.186	0.013
$0.354E + 00$	0.526	0.558	0.637	0.632	0.552	0.284
$0.177E + 00$	0.537	0.565	0.658	0.733	0.730	0.612
$0.884E - 01$	0.546	0.573	0.661	0.763	0.796	0.777
$0.442E - 01$	0.554	0.581	0.661	0.767	0.816	0.851
$0.221E - 01$	0.561	0.588	0.662	0.762	0.816	0.878
$0.110E - 01$	0.565	0.593	0.664	0.757	0.811	0.883
$0.552E - 02$	<i>0.569</i>	<i>0.597</i>	<i>0.665</i>	<i>0.754</i>	<i>0.807</i>	<i>0.882</i>
$0.276E - 02$	0.605	0.619	0.673	0.753	0.804	0.880
$0.138E - 02$	0.683	0.674	0.695	0.763	0.810	0.884
$0.691E - 03$	0.768	0.768	0.769	0.801	0.835	0.900
$0.345E - 03$	0.856	0.834	0.830	0.858	0.885	0.939
$0.173E - 03$	1.079	0.995	0.920	0.916	0.935	0.986
$0.863E - 04$	1.341	1.223	1.070	0.999	0.997	1.028

FIG. 4.12 – *Pentes calculées sur le graphe 4.11 (angles concaves).***Remarques.**

- La valeur de  $\varepsilon$  de la première colonne correspond à la moyenne géométrique des valeurs utilisées pour calculer la pente.
- La ligne en caractères penchés est conservée comme estimation de la pente moyenne.

$\varepsilon$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$0.707E + 00$	0.236	0.348	0.525	0.864	1.310	1.513
$0.354E + 00$	0.549	0.668	0.838	1.204	1.752	1.912
$0.177E + 00$	0.818	0.919	1.081	1.485	2.155	2.202
$0.884E - 01$	1.002	1.095	1.257	1.695	2.477	2.427
$0.442E - 01$	1.121	1.208	1.370	1.833	2.694	2.625
$0.221E - 01$	1.187	1.271	1.433	1.911	2.826	2.777
$0.110E - 01$	1.220	1.302	1.465	1.952	2.904	2.876
$0.552E - 02$	<i>1.236</i>	<i>1.318</i>	<i>1.482</i>	<i>1.974</i>	<i>2.947</i>	<i>2.934</i>
$0.276E - 02$	1.244	1.327	1.491	1.982	2.965	2.966
$0.138E - 02$	1.249	1.330	1.490	1.969	2.975	2.983
$0.691E - 03$	1.249	1.323	1.473	1.969	3.018	2.991
$0.345E - 03$	1.236	1.308	1.478	2.060	3.101	2.992
$0.173E - 03$	1.250	1.356	1.578	2.235	3.159	2.985
$0.863E - 04$	1.357	1.489	1.736	2.431	3.184	2.957

FIG. 4.13 – *Pentes calculées sur le graphe 4.11 (angles convexes).***Remarques.**

- La valeur de  $\varepsilon$  de la première colonne correspond à la moyenne géométrique des valeurs utilisées pour calculer la pente.
- La ligne en caractères penchés est conservée comme estimation de la pente moyenne.

Afin de comparer les pentes estimées au moyen des figures 4.8 et 4.11 avec les pentes théoriques issues du théorème 4.6, on a tracé sur les figures 4.14 et 4.15 les valeurs obtenues numériquement (cf. lignes en caractères penchés dans les tableaux précédents) avec les pentes théoriques suivantes, voir estimations (4.17) et (4.18) :

$$\text{en norme } L^2, \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} & \text{si } \frac{\pi}{\omega} < 1, \\ \frac{\pi}{\omega} + 1 & \text{si } 1 \leq \frac{\pi}{\omega} < 2, \\ 3 & \text{si } \frac{\pi}{\omega} > 2. \end{cases} \quad \text{en norme } H^1, \begin{cases} \frac{\pi}{\omega} & \text{si } \frac{\pi}{\omega} < 3, \\ 3 & \text{si } \frac{\pi}{\omega} > 3. \end{cases}$$

Dans les graphes 4.14 et 4.15, les lignes en traits pleins correspondent aux pentes théoriques ci-dessus et les points (•) aux pentes obtenues numériquement. Les points repérés par le symbole (◦) correspondent à la valeur de la pente en l'absence de coin dans le domaine ; cette situation relève du chapitre 1.

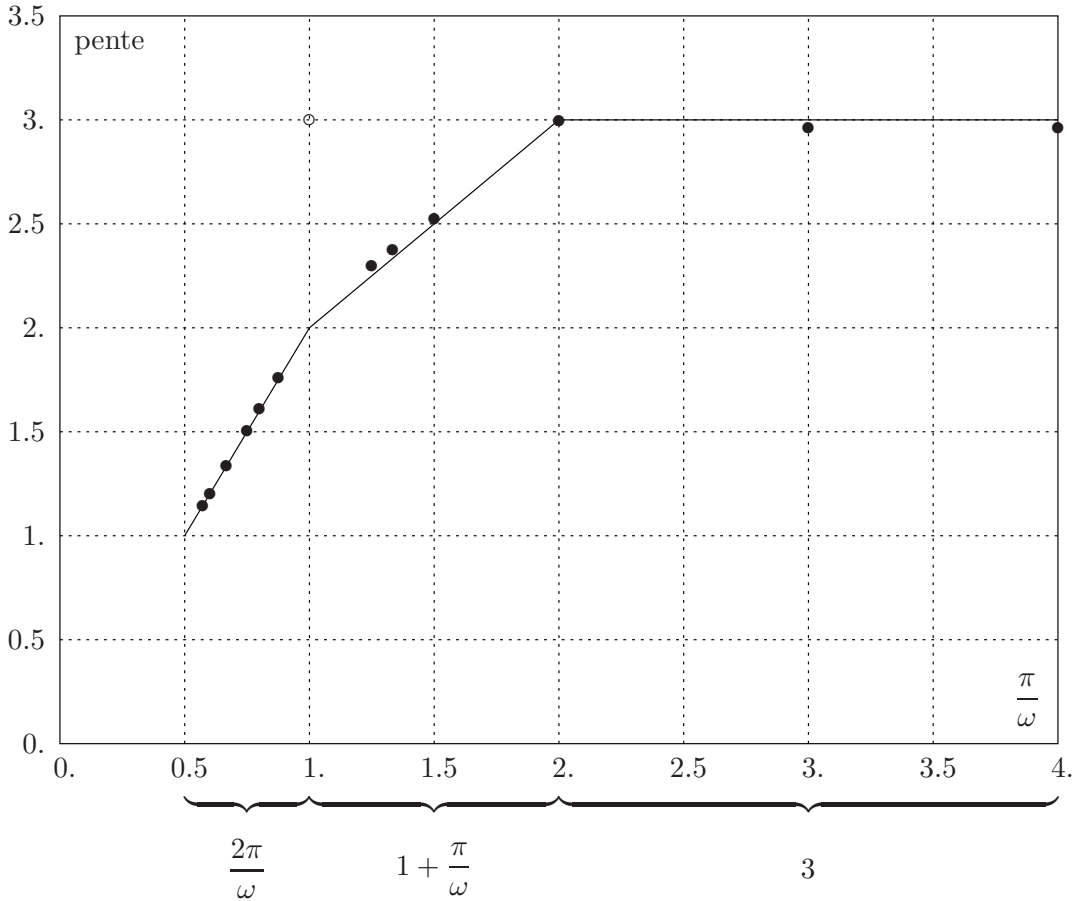
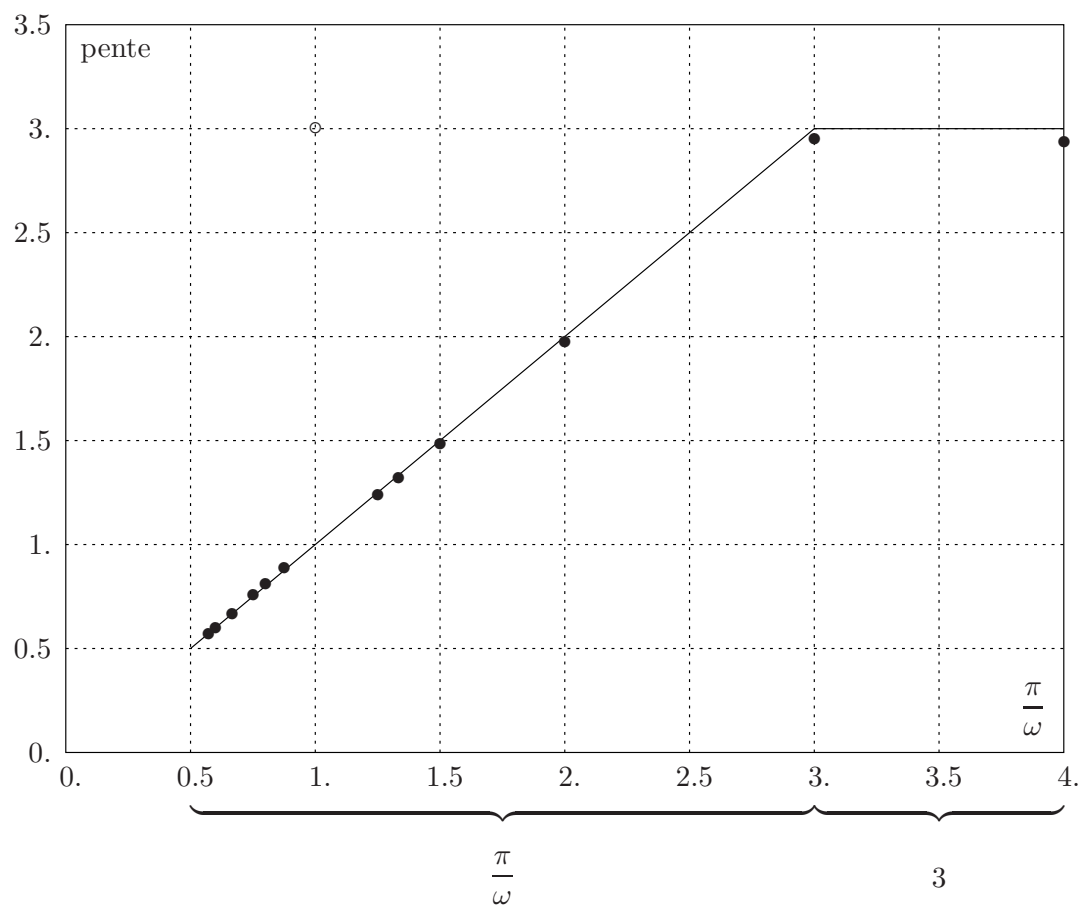


FIG. 4.14 – Pentes théoriques et estimées (norme  $L^2$ ).

FIG. 4.15 – *Pentes théoriques et estimées (norme  $H^1$ ).*

## 4.5 Conclusion

La construction de développements asymptotiques multi-échelle a permis d'obtenir des estimations d'erreur optimales entre la solution du problème de transmission et celle du problème avec condition d'impédance d'ordre 2. L'ouverture  $\omega$  de l'angle du coin joue un rôle déterminant.

- Pour les angles inférieurs à  $\frac{\pi}{3}$ , la performance est la même que dans le cas d'un domaine régulier, étudié au chapitre 1. Notons que dans cette situation, les singularités du problème intérieur sont relativement régulières. Le début du développement asymptotique peut donc être construit comme au chapitre 1, si bien qu'il n'est pas nécessaire de recourir à l'utilisation de profils pour obtenir l'estimation d'erreur en  $\varepsilon^3$ .
- Pour les angles proches de  $2\pi$ , l'approximation de la couche mince par la condition d'impédance est très fortement dégradée : en norme  $H^1$ , on a seulement une convergence en  $\sqrt{\varepsilon}$ , ce qui est très lent. Ce phénomène a été observé par les ingénieurs, sans jusqu'ici pouvoir être quantifié.
- Pour les angles intermédiaires, la condition d'impédance est moins performante qu'en l'absence de coin. Même pour les angles entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , pourtant convexes, la dégradation est sensible, puisque la convergence se situe entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$  au lieu de  $\varepsilon^3$ .

Les résultats numériques présentés au paragraphe précédent confortent en tout point l'étude théorique faite dans ce chapitre.

On souhaiterait remplacer la condition d'impédance par une autre condition dans le cas où sa performance est dégradée par la présence d'un coin. L'étude qui précède montre que l'erreur est produite par la différence

$$\mathfrak{K}^{\Lambda, -\frac{\pi}{\omega}} - \mathfrak{Z}^{\Lambda, -\frac{\pi}{\omega}},$$

premiers termes “non-algorithmiques” dans le développement des profils relatifs à chaque problème. Une analyse complémentaire est nécessaire afin de savoir si la condition d'impédance peut-être modifiée de manière à compenser cette quantité.

## Annexe

# Approximation de degré élevé avec MÉLINA

Tous les tests numériques présentés dans ce document ont été réalisés à l'aide du code MÉLINA (voir [23]). Ce code est installé et utilisé dans plusieurs laboratoires, en particulier à l'IRMAR et à l'ENSTA (Paris).

La bibliothèque d'éléments finis MÉLINA consiste en un ensemble de routines (en Fortran 77 pour l'instant, une version C++ est en cours de réalisation) qui permettent à l'utilisateur de définir et résoudre des problèmes aux limites elliptiques. Bien que MÉLINA ait été à l'origine conçu pour traiter des problèmes en domaine non borné, il est aujourd'hui largement utilisé dans la résolution de problèmes en domaine borné, comme c'est le cas ici.

Pour résoudre un problème aux limites avec MÉLINA, deux éléments sont nécessaires :

- un maillage qui définit la géométrie du (ou des) domaine(s) ;
- la formulation variationnelle du problème.

Il suffit alors d'écrire au format approprié la formulation variationnelle (conditions aux limites comprises) et de préciser le type d'élément fini à utiliser (Lagrange  $\mathbb{P}_1$ , par exemple). La mise au point d'un programme pour résoudre un problème nécessite l'écriture de trois fichiers (d'une trentaine de lignes chacun pour l'application qui nous intéresse ici) : le premier définit la formulation variationnelle, le deuxième les fonctions annexes utilisées et le troisième commande les actions d'assemblage, de résolution et de renseignement des fichiers résultats.

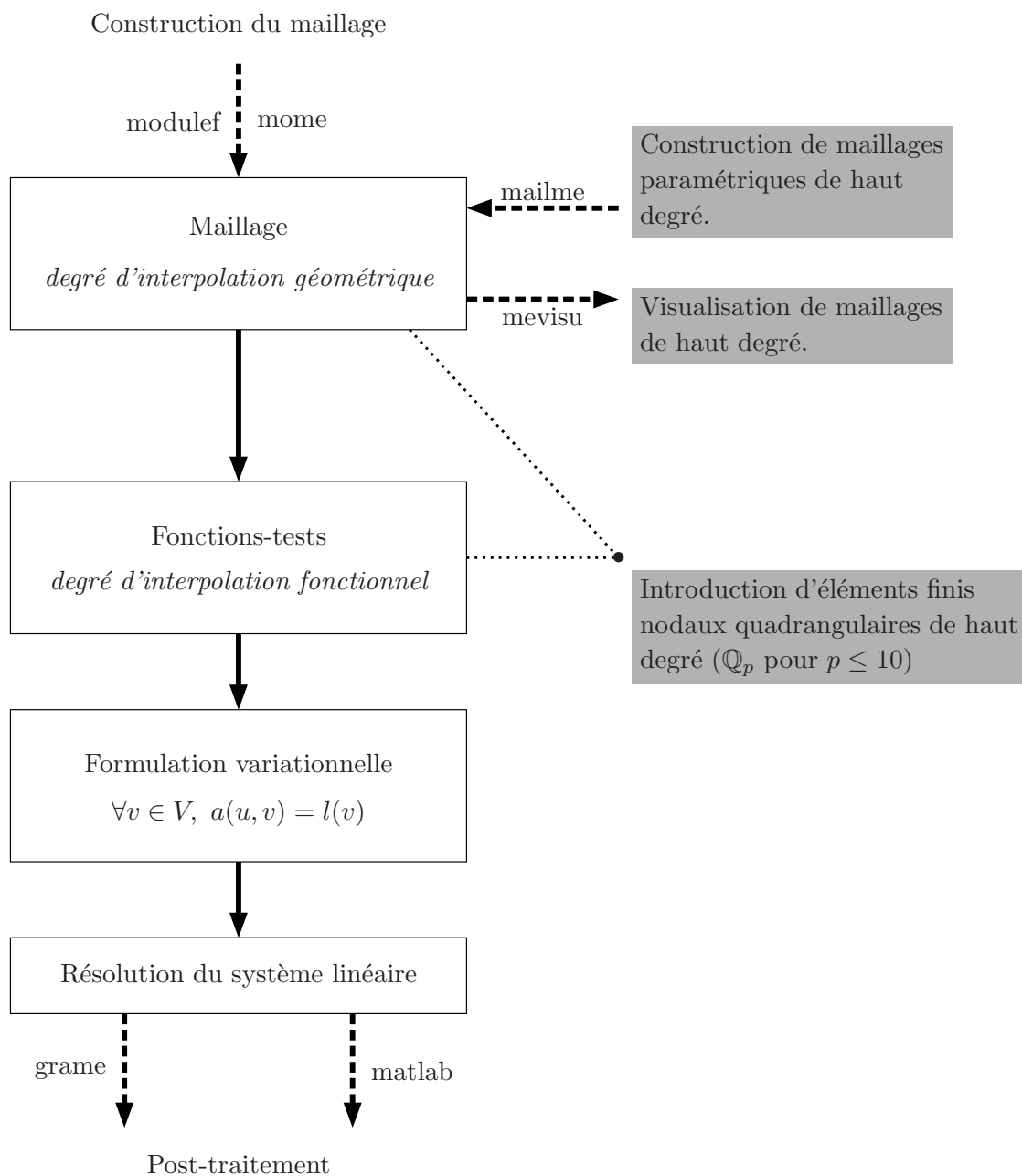


FIG. A – Organisation du code MÉLINA et des modules périphériques.

Des utilitaires sont disponibles pour la traduction de maillages construits à l'aide du logiciel Modulef (voir [19]) et la visualisation des résultats : il s'agit du traducteur mome et de l'interface graphique grame.

L'organigramme de la figure A résume les fonctionnalités du code. Une partie du travail de thèse a consisté en l'apport de nouvelles fonctionnalités ; ces dernières correspondent aux cases grisées. Il s'agit essentiellement de l'introduction d'éléments finis de haut degré quadrangulaires, tant géométriques que fonctionnels. Sont désormais disponibles dans MÉLINA (pour une documentation précise, voir [23]) :

- un module matlab (mailme) de maillage de domaines simples (polygones, couronnes) à l'aide d'éléments finis nodaux quadrangulaires d'ordre  $p \leq 10$ . Ce module a permis de construire les maillages utilisés dans les calculs présentés au chapitre 1, en faisant varier l'épaisseur  $\varepsilon$  de la couche mince ;
- un programme de visualisation (mevisu) de maillages au format MÉLINA (avec lequel les dessins de maillage du chapitre 4 ont été obtenus) ;
- les éléments finis nodaux  $\mathbb{Q}_p$  ( $p \leq 10$ ) aux points équidistants et aux abscisses de Gauss-Lobatto.

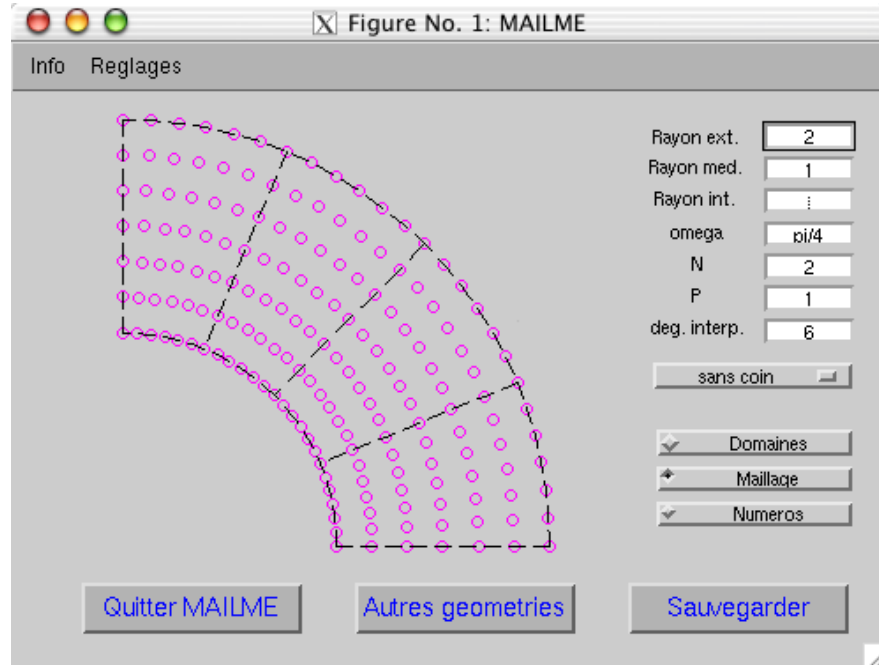


FIG. B – Screenshot du mailleur mailme.



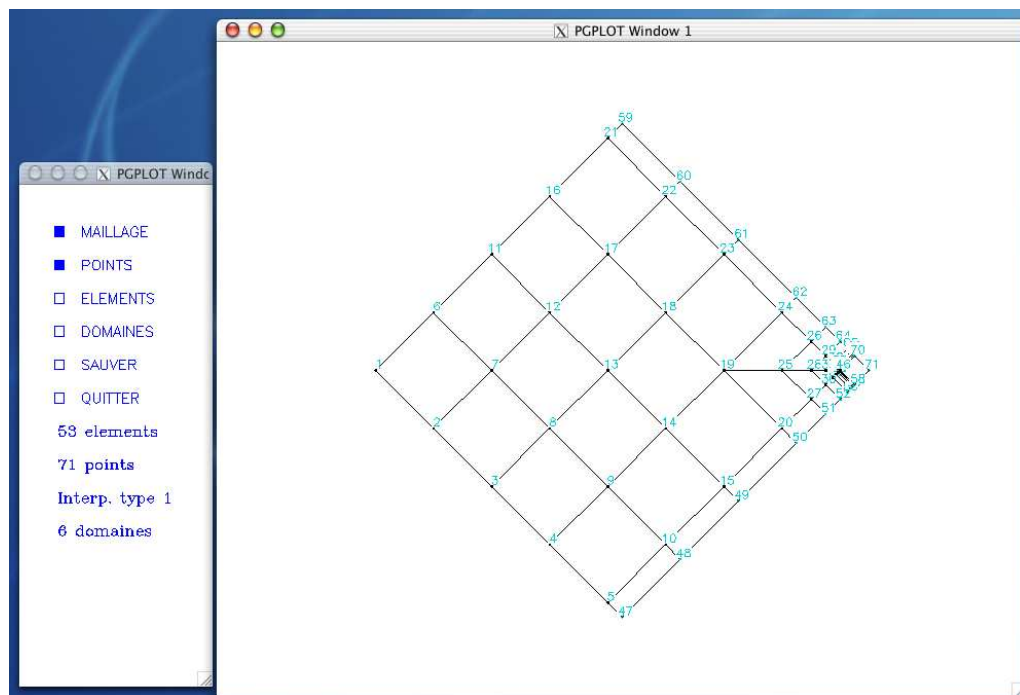


FIG. C – Screenshot du visualiseur de maillage mevisu.

# Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, Orlando 1970.
- [2] S. AGMON. *Lectures on elliptic boundary value problems*. Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London 1965.
- [3] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959) 623–727.
- [4] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964) 35–92.
- [5] H. AMMARI, L. HALPERN, K. HAMDACHE. Asymptotic behaviour of thin ferromagnetic films. *Asymptot. Anal.* **24**(3-4) (2000) 277–294.
- [6] H. AMMARI, C. LATIRI-GROUZ. Approximate boundary conditions for thin periodic coatings. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Golden, CO, 1998)*, pages 297–301. SIAM, Philadelphia, PA 1998.
- [7] A. BENDALI, K. LEMRABET. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.* **56**(6) (1996) 1664–1693.
- [8] M. BERGER, B. GOSTIAUX. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, second edition 1992.

- [9] M. BOURLARD, A. MAGHNOUJI, S. NICAISE, L. PAQUET. Asymptotic expansion of the solution of a mixed Dirichlet-Ventcel problem with a small parameter. *Asymptot. Anal.* **28**(3-4) (2001) 241–278.
- [10] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1983.
- [11] M. COSTABEL, M. DAUGE. A singularly perturbed mixed boundary value problem. *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996) 1919–1949.
- [12] M. DAUGE. *Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains – Smoothness and Asymptotics of Solutions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [13] M. DAUGE, B. TEXIER. Problèmes de transmission non coercifs dans des polygones (1997).
- [14] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 3. INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection]. Masson, Paris 1988. Transformations, Sobolev, Opérateurs, With the collaboration of Michel Artola, Marc Authier, Michel Cessenat, Jean Michel Combes, Bertrand Mercier and Claude Wild, Reprinted from the 1984 edition.
- [15] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 4. INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection]. Masson, Paris 1988. Méthodes variationnelles. [Variational methods], With the collaboration of Michel Artola, Marc Authier, Michel Cessenat, Jean Michel Combes, Bertrand Mercier and Claude Wild, Reprinted from the 1984 edition.
- [16] B. ENGQUIST, J. C. NEDELEC. Effective boundary conditions for electromagnetic scattering in thin layers. Rapport interne 278, CMAP 1993.
- [17] P. GRISVARD. *Boundary value problems in non-smooth domains*. Pitman, London 1985.
- [18] H. HADDAR, P. JOLY. Effective boundary conditions for thin ferromagnetic coatings. Asymptotic analysis of the 1D model. *Asymptot. Anal.* **27**(2) (2001) 127–160.
- [19] INRIA. Modulef, une bibliothèque modulaire d’éléments finis.  
<http://www-rocq.inria.fr/modulef/> (1999).
- [20] V. A. KONDRAT’EV. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.* **16** (1967) 227–313.
- [21] Y. LAFRANCHE, D. MARTIN. `fig4tex`, macros T<sub>E</sub>X pour le graphisme de précision.

- <http://perso.univ-rennes1.fr/yvon.lafranche> (2002).
- [22] J.-L. LIONS, E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris 1968.
- [23] D. MARTIN. MÉLINA, bibliothèque de calculs éléments finis.  
<http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina> (2002).
- [24] S. A. NAZAROV, M. V. OLYUSHIN. Perturbation of the eigenvalues of the Neumann problem due to the variation of the domain boundary. *Algebra i Analiz* **5**(2) (1993) 169–188.
- [25] J.-C. NÉDÉLEC. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [26] S. NICAISE. *Polygonal interface problems*, volume 39 of *Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik [Methods and Procedures in Mathematical Physics]*. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main 1993.



# Index des notations

## Chapitre 1

$\varepsilon$	Épaisseur de la couche mince, destinée à tendre vers 0. (p. 15)
$\Omega_{\text{int}}$	Domaine intérieur dont le bord est régulier. (p. 15)
$\Gamma$	Bord du domaine intérieur $\Omega_{\text{int}}$ . (p. 15)
$\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$	Couche mince uniforme autour du domaine intérieur d'épaisseur $\varepsilon$ . (p. 15)
$\Omega^\varepsilon$	Domaine avec couche mince. (p. 15)
$\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$	Bord du domaine $\Omega^\varepsilon$ . (p. 15)
$u^\varepsilon$	Solution du problème de transmission dans $\Omega^\varepsilon$ . (p. 16)
$\mathcal{R}^\varepsilon$	Carré $(-1, 1) \times (-1, 1 + \varepsilon)$ . (p. 18)
$\tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$	Carré $(-2, 2) \times (-2, 1 + \varepsilon)$ . (p. 18)
$\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon$	Carré $(-3, 3) \times (-3, 1 + \varepsilon)$ . (p. 18)
$\chi$	Fonction de troncature valant 1 dans $\mathcal{R}^\varepsilon$ et 0 dans $\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon \setminus \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon$ . (p. 18)
$\sqsubseteq$	Relation d'ordre sur les ensembles modèles au voisinage du bord. (p. 19)
$(t, s)$	Coordonnées locales dans $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ , $t$ est l'abscisse curviligne et $s$ la variable normale ( $0 \leq s \leq \varepsilon$ ). (p. 27)
$(t, S)$	Coordonnées semi-dilatées dans $\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$ : $S = \varepsilon^{-1}s$ . (p. 28)
$A_\ell$	Opérateurs intervenant dans le développement en puissances de $\varepsilon$ du Laplacien dans le domaine extérieur. (p. 28)
$F_{\text{ext}}^\ell$	Fonction intervenant dans le développement de Taylor de $f_{\text{ext}}$ dans la variable dilatée $S$ . (p. 28)
$r_\varepsilon^N$	Reste d'ordre $N$ dans le développement asymptotique de $u^\varepsilon$ . (p. 31)

$v_{[0]}^\varepsilon$	Solution du problème avec condition d'impédance d'ordre 0. (p. 34)
$v_{[1]}^\varepsilon$	Solution du problème avec condition d'impédance d'ordre 1. (p. 34)
$v_{[2]}^\varepsilon$	Solution du problème avec condition d'impédance d'ordre 2. (p. 36)
$\mathbb{Q}_p$	Espace vectoriel des polynômes de deux variables, de degré au plus $p$ par rapport à chacune d'entre elles. (p. 38)
$F_K$	Fonction faisant correspondre l'élément courant $K$ à l'élément de référence $\widehat{K} = [0, 1] \times [0, 1]$ . (p. 38)

## Chapitre 2

$Q$	Domaine angulaire infini avec couche d'épaisseur 1. (p. 46)
$G$	Bord intérieur du domaine $Q$ . (p. 46)
$\mathfrak{V}$	Espace variationnel associé au problème de transmission dans le domaine modèle. (p. 47)
$(r, \theta)$	Coordonnées polaires dans le domaine intérieur, tangentielle-normale dans la partie extérieure. (p. 50)
$\zeta$	Fonction de troncature valant 0 au voisinage du coin. (p. 51)
$\check{Q}$	Domaine "polaire" correspondant au domaine cartésien $Q$ . (p. 51)
$\mathcal{F}^*$	Opérateur permettant de définir une fonction sur $Q$ à partir d'une fonction de $\check{Q}$ . (p. 51)
$\check{\Delta}$	Laplacien en coordonnées polaires. (p. 52)
$\Theta_{\text{int}}$	Intervalle $(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ . (p. 53)
$\mathfrak{s}^\lambda$	Fonction singulière en $r^\lambda$ . (p. 54)
$\Theta_{\text{ext}}^\pm$	Intervalle $\pm(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2} + 1)$ . (p. 54)
$\mathfrak{S}^\lambda(\check{Q})$	Espace des fonctions singulières. (p. 55)
$\mathfrak{K}^\Lambda$	Solution au problème de transmission dans $Q$ , dont le comportement à l'infini est donné par $\mathfrak{s}^\Lambda$ . (p. 56)
$\mathfrak{K}^{\Lambda, \mu}$	Élément du développement de $\mathfrak{K}^\Lambda$ : $\Lambda$ rappelle son origine et $\mu$ est l'exposant tel que $\mathfrak{K}^{\Lambda, \mu} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^\mu(\check{Q}))$ . (p. 56)
$\mathfrak{u}^{\Lambda, p}$	Solution variationnelle du problème de transmission : $\Lambda$ rappelle l'origine du problème et $p$ le degré jusqu'où on a poussé le développement sur-variationnel. (p. 56)
$\widetilde{Q}$	Bande infinie $\mathbb{R} \times (-\frac{\omega}{2} - 1, \frac{\omega}{2} + 1)$ . (p. 59)
$(t, \theta)$	Coordonnées dans la bande $\check{Q} : t = \log r$ . (p. 59)
$T_{\text{int}}$	Opérateur sur $\check{Q}_{\text{int}}$ correspondant au laplacien dans $Q_{\text{int}}$ . (p. 60)

$T_{\text{ext}}$	Opérateur sur $\check{Q}_{\text{ext}}$ correspondant au laplacien dans $Q_{\text{ext}}^\varepsilon$ . (p. 60)
$T_{\text{tr}}$	Opérateur sur $\tilde{G}$ correspondant à la condition de transmission sur $G$ . (p. 60)
$K_\gamma^m(\tilde{Q})$	Espace à poids : $m$ est l'ordre de dérivation, $\gamma$ définit le poids. (p. 64)
$\tilde{u}^0$	Partie tronquée au coin de la solution variationnelle : $\tilde{u}^0 = \zeta \tilde{u}^{\Lambda,p}$ . (p. 66)
$\hat{u}$	Transformée de Mellin de $\tilde{u}$ . (p. 67)
$\ \cdot\ _{H^m(\Theta,\rho)}$	Norme à poids sur $H^m(\Theta)$ . (p. 68)
$\kappa$	Transformée de Mellin de $\tilde{u}^0$ . (p. 69)
$R_{\text{int}}$	Opérateur de résolution intérieure en la variable angulaire. (p. 71)
$R_{\text{ext}}$	Opérateur de résolution extérieure en la variable normale. (p. 71)
$\Omega^\Lambda$	Ensemble des pôles. (p. 71)
$\mathfrak{W}^\beta$	Solution du problème de transmission dans $Q$ avec un second membre intérieur donné par $r^{\Lambda-2} \cos^{\beta_1} \theta \sin^{\beta_2} \theta$ ( $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ et $ \beta  = \Lambda - 2$ ). (p. 79)
$\mathfrak{W}^{\beta,\mu}$	Élément du développement de $\mathfrak{W}^\beta$ ; $\beta$ rappelle son origine et $\mu$ est l'exposant tel que $\mathfrak{W}^{\beta,\mu} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^\mu(\check{Q}))$ . (p. 79)

## Chapitre 3

$\Omega_{\text{int}}$	Domaine intérieur dont le bord comporte un coin. (p. 81)
$\Gamma$	Bord du domaine intérieur $\Omega_{\text{int}}$ . (p. 81)
$O_{\text{int}}$	Point de $\Gamma$ où $\Omega_{\text{int}}$ présente un coin. (p. 81)
$\omega$	Ouverture du secteur angulaire au coin, $\omega \in (0, 2\pi)$ . (p. 81)
$\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$	Couche mince uniforme autour du domaine intérieur d'épaisseur $\varepsilon$ . (p. 81)
$\Omega^\varepsilon$	Domaine avec couche mince. (p. 81)
$\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$	Bord du domaine $\Omega^\varepsilon$ . (p. 81)
$u^\varepsilon$	Solution du problème de transmission dans $\Omega^\varepsilon$ . (p. 82)
$(r, \theta)$	Coordonnées polaires centrées au coin $O_{\text{int}}$ , avec $-\frac{\omega}{2} < \theta < \frac{\omega}{2}$ . (p. 82)
$\vec{n}(x)$	Normale unitaire extérieure à $\Omega_{\text{int}}$ au point $x \in \Gamma$ . (p. 82)
$\vec{\tau}(x)$	Tangente unitaire à $\Gamma$ au point $x \in \Gamma$ . (p. 82)
$\vec{\nu}(x)$	Champ de vecteurs non-unitaires permettant de représenter la couche mince sous forme tensorielle. (p. 83)
$\ell_\Gamma$	Longueur de la courbe $\Gamma$ . (p. 83)



$(t, s)$	Coordonnées locales dans la couche mince : $t$ est tangentielle, $s$ est selon la direction $\vec{\nu}$ . (p. 83)
$(t, S)$	Coordonnées semi-dilatées dans la couche mince : $S = \varepsilon^{-1}s$ . (p. 86)
$A_\ell$	Opérateurs intervenant dans le développement du Laplacien dans les coordonnées $(t, S)$ . (p. 87)
$a(t)$	Fonction intervenant dans le développement de la dérivée normale dans les coordonnées $(t, S)$ . (p. 87)
$\mathfrak{s}^{\frac{\pi}{\omega}}$	Première fonction singulière, voir chapitre 2. (p. 88)
$\chi$	Fonction de troncature radiale valant 1 pour $r < \tau_0$ et 0 pour $r > \tau_1$ . (p. 89)
$c_q^0$	Coefficient de singularité de rang $q$ pour $u_{\text{int}}^0$ . (p. 92)
$u_{\text{plat}, \text{int}}^0$	Partie plate de $u_{\text{int}}^0$ . (p. 92)
$\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$	Fonction singulière, voir chapitre 2. (p. 92)
$\mathfrak{R}^{\frac{q\pi}{\omega}}$	Profil correspondant à $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$ , voir chapitre 2. (p. 92)
$k_\varepsilon^0$	Terme correctif relatif à $u^0$ . (p. 93)
$\mathfrak{s}_0^{\frac{q\pi}{\omega}}$	Prolongement par 0 à l'extérieur de $\mathfrak{s}^{\frac{q\pi}{\omega}}$ . (p. 93)
$\mathcal{U}$	Ensemble des exposants $\mu$ . (p. 93)
$f^{0, \mu}$	Fonctions intervenant dans le développement de $\Delta k_\varepsilon^0$ . (p. 93)
$[\log \varepsilon]$	Désigne une dépendance polynomiale en $\log \varepsilon$ . (p. 93)
$u_{\text{plat}}^\mu$	Terme plat de rang $\mu$ dans le développement de $u^\varepsilon$ . (p. 99)
$r_\varepsilon^N$	Reste d'ordre $N$ dans le développement de $u^\varepsilon$ . (p. 99)
$c_q^\mu$	Coefficient de singularité de rang $q$ correspondant à $u_{\text{int}}^\mu$ . (p. 99)
$\mathfrak{W}^\beta$	Profil correspondant au problème non-homogène, voir chapitre 2. (p. 102)

## Chapitre 4

$\Omega_{\text{int}}$	Domaine intérieur dont le bord comporte un coin. (p. 105)
$\Gamma$	Bord du domaine intérieur $\Omega_{\text{int}}$ . (p. 105)
$O_{\text{int}}$	Point de $\Gamma$ où $\Omega_{\text{int}}$ présente un coin. (p. 105)
$\omega$	Ouverture du secteur angulaire au coin, $\omega \in (0, 2\pi)$ . (p. 105)
$\Omega_{\text{ext}}^\varepsilon$	Couche mince uniforme autour du domaine intérieur d'épaisseur $\varepsilon$ . (p. 105)
$\Omega^\varepsilon$	Domaine avec couche mince. (p. 105)
$\Gamma_{\text{ext}}^\varepsilon$	Bord du domaine $\Omega^\varepsilon$ . (p. 105)
$u^\varepsilon$	Solution du problème de transmission dans $\Omega^\varepsilon$ . (p. 106)

---

$v^\varepsilon$	Solution du problème avec condition d'impédance d'ordre 2. (p. 106)
$\mathfrak{s}^{\frac{k\pi}{\omega}}$	Fonction singulière, voir chapitre 2. (p. 107)
$\mathfrak{S}^\mu(\check{Q}_{\text{int}})$	Espace des fonctions singulières, voir chapitre 2. (p. 107)
$\Omega_0^\Lambda \cup \Omega^-$	Ensemble des pôles, voir chapitre 2. (p. 107)
$\mathfrak{Z}^\Lambda$	Solution au problème d'impédance dans $Q_{\text{int}}$ , dont le comportement à l'infini est donné par $\mathfrak{s}^\Lambda$ . (p. 108)
$\mathfrak{Z}^{\Lambda,\mu}$	Élément du développement de $\mathfrak{Z}^\Lambda$ : $\Lambda$ rappelle son origine et $\mu$ est l'exposant tel que $\mathfrak{Z}^{\Lambda,\mu} \in \mathcal{F}^*(\mathfrak{S}^\mu(\check{Q}))$ . (p. 108)
$\mathcal{F}^*$	Opérateur permettant de définir une fonction sur $Q$ à partir d'une fonction de $\check{Q}$ , voir chapitre 2. (p. 108)
$v_{\text{plat}}^\mu$	Termes plats dans le développement asymptotique de $v^\varepsilon$ . (p. 108)
$d_q^\mu$	Coefficient de singularité de rang $q$ correspondant à $v_{\text{int}}^\mu$ . (p. 108)
$\mathcal{U}$	Ensemble des exposants $\mu$ , voir chapitre 3. (p. 108)





ANALYSE MULTI-ÉCHELLE ET CONDITIONS AUX LIMITES APPROCHÉES  
POUR UN PROBLÈME AVEC COUCHE MINCE DANS UN DOMAINE À COIN.

**Résumé**

Ce travail porte sur l'analyse asymptotique d'un problème de transmission avec couche mince dans un domaine bidimensionnel à coin. Précisément, on construit un développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur de la couche. La présence d'un coin engendre des singularités qui compromettent la construction habituelle du développement, par résolution alternative entre le domaine intérieur et la couche. Celles-ci sont traitées par l'introduction de profils construits dans un domaine infini avec couche d'épaisseur 1 à l'aide de la transformation de Mellin. On s'intéresse ensuite à la performance de la condition aux limites approchée, dont on sait qu'elle remplace l'effet de la couche mince jusqu'à l'ordre 3 dans le cas d'un domaine régulier. On montre que la présence d'un coin détériore son efficacité, ce d'autant plus que l'angle d'ouverture est grand. Des calculs numériques ont été effectués, qui confirment les résultats théoriques obtenus.

MULTISCALE ANALYSIS AND APPROXIMATE BOUNDARY CONDITIONS  
FOR A PROBLEM WITH THIN LAYER IN A CORNER DOMAIN.

**Abstract**

This work consists in the asymptotic analysis of a transmission problem with thin layer in a two-dimensional corner domain. An asymptotic expansion of the solution with respect to the thickness of the layer is constructed. Due to the corner, singularities appear which prevent from constructing the expansion through an alternative resolution between the interior domain and the layer. The singularities are handled with the help of profiles constructed in an infinite domain with layer of thickness 1 via the Mellin transform.

Next, the efficiency of the approximate boundary condition (obtained for smooth domains) is studied. We show that the performance deteriorates for corner domains, especially when the opening of the corner is large. Numerical tests are given, which confirm the theoretical results.